ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социокинетика. 2022. Т. 28, № 3. С. 125–133. ISSN 2073-1426
Vestnik of Kostroma State University. Series: Pedagogy. Psychology. Sociokinetics, 2022, vol. 28, № 3, pp. 125–133. ISSN 2073-1426
Научная статья
УДК 378:51
https://doi.org/10.34216/2073-1426-2022-28-3-125-133

ВЫПОЛНЕНИЕ МНОГОЭТАПНОГО МАТЕМАТИКО-ИНФОРМАЦИОННОГО ЗАДАНИЯ «ХАОТИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ» КАК СРЕДСТВО РАЗВИТИЯ КРЕАТИВНОСТИ СТУДЕНТОВ

Секованов Валерий Сергеевич, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор, Костромской государственный университет, Кострома, Россия, sekovanovvs@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-8604-8931

Катержина Светлана Федоровна, кандидат педагогических наук, Костромской государственный университет, Кострома, Россия, svetakaterzhina@mail.ru, https://orcid.org/ 0000-0003-4118-7898

Рыбина Лариса Борисовна, кандидат философских наук, Костромская государственная сельскохозяйственная академия, Кострома, Россия, larisa.rybina.2014@mail.ru, https://orcid.org/0000-0001-7891-9373

Шапошникова Ирина Вадимовна, кандидат технических наук, Сургутский государственный университет БУ ВО Ханты-Мансийского автономного округа – Югры, Сургут, Россия, i-v-sh@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-0878-1871

Аннотация. В данной статье излагается методика выполнения многоэтапного математико-информационного задания «Хаотичные отображения», нацеленная на развитие креативности студентов. Отмечены творческие виды деятельности, которые выполняет студент в процессе решения многогранных задач. Построена схема-план выполнения многоэтапного математико-информационного задания. Приведены примеры хаотических отображений как на вещественной, так и на комплексной плоскостях. Указана эстетика множеств Жюлиа, с помощью которых студентам предлагается создать художественные композиции. Отмечена интеграция математики и программирования. Выявлены креативные качества, которые формируются у студентов в процессе выполнения многоэтапного математико-информационного задания.

Ключевые слова: креативность, креативные качества, хаос, множества Жюлиа, существенная зависимость от начальных условий, транзитивность, всюду плотность периодических точек, непрерывная динамическая система, дискретная динамическая система, аттрактор.

Для цитирования: Секованов В.С., Катержина С.Ф., Рыбина Л.Б., Шапошникова И.В. Выполнение многоэтапного математико-информационного задания «Хаотические отображения» как средство развития креативности студентов // Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социокинетика. 2022. Т. 28, № 3. С. 125–133. https://doi.org/10.34216/2073-1426-2022-28-3-125-133

Research Article

PERFORMING A MULTI-STAGE MATHEMATICAL AND INFORMATIONAL TASK "CHAOTIC MAPPINGS" AS A MEANS OF DEVELOPING STUDENTS' CREATIVITY

Valery S. Sekovanov, Doctor of Pedagogic Sciences, Candidate of Physical-Mathematical Sciences, Kostroma State University, Kostroma, Russia, sekovanovvs@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-8604-8931

Svetlana F. Katerzhina, Candidate of Pedagogic Sciences, Kostroma State University, Kostroma, Russia, svetakaterzhina@mail.ru, https://orcid.org/0000-0003-4118-7898

Larisa B. Rybina, Candidate of Philosophic Sciences, Kostroma State Agricultural Academy, larisa.rybina.2014@mail.ru, https://orcid.org/0000-0001-7891-9373

Irina V. Shaposhnikova, Candidate of Technical Sciences, Surgut State University of Khanty-Mansi autonomy AKA Yugra, Surgut, Russia, i-v-sh@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-0878-1871

Abstract. This article describes the method of performing a multi-stage mathematical and informational task "Chaotic mappings", aimed at developing students' creativity. The creative activities that the student performs in the process of solving multifaceted tasks are noted. A scheme is constructed-a plan for the implementation of a multi-stage mathematical and informational task. Examples of chaotic maps on both real and complex planes are given. The aesthetics of the Julia sets are indicated, with the help of which students are invited to create artistic compositions. The integration of mathematics and programming is noted. The creative qualities the students master in the process of performing a multi-stage mathematical and informational task are revealed.

Keywords: creativity, creative qualities chaos, Julia sets, essential dependence on initial conditions, transitivity, density of periodic points everywhere, continuous dynamical system, discrete dynamical system, attractor

For citation: Sekovanov V.S., Katerzhina S.F., Rybina L.B., Shaposhnikova I.V. Performing a multi-stage mathematical and informational task "Chaotic mappings" as a means of developing students' creativity. Vestnik of Kostroma State University. Series: Pedagogy. Psychology. Sociokinetics, 2022, vol. 28, № 3, pp. 125–133. https://doi.org/10.34216/2073-1426-2022-28-3-125-133

Мы живем в нелинейном мире, подвергающемся хаотическим явлениям. В природе, например, это землетрясения, цунами. В социальной сфере – революции, скачкообразный курс валюты. Современная наука начинает исследовать хаотические явления, которые характеризуются тремя параметрами: существенная зависимость от начальных условий (эффект бабочки), транзитивность и всюду плотность периодических точек.

Креативность мы понимаем в самом широком смысле, как способность к творчеству, и ставим своей целью в данной статье развивать это понятие при изучении хаотических отображений.

Основатель синергетики Герман Хакен отмечает: «Этот тип явлений [хаос] обнаружен к настоящему времени в совершенно различных областях исследований, простирающихся от физики до биологии».

Поэтому мы считаем, что обучаемым полезно знакомиться с элементами хаоса как можно раньше, что обогатит их интуитивное представление о нелинейном мире и хаотических явлениях, позитивно влияя на развитие их креативности.

Исследованиям хаоса, фракталов и креативности посвящены многочисленные работы, среди которых отметим труды Р.М. Кроновера, Б. Мандельброта, Дж. Минлора, Х.О. Пайтгена, В.С. Секованова, М. Шредера, Г. Шустера и др.

Изучение хаотических отображений, моделирующих элементы хаоса, на наш взгляд, эффективно изучать, выполняя многоэтапное математико-информационное задание (ММИЗ).

Мы рассматриваем ММИЗ как специально составленную последовательность задач, упражнений, проблем и дидактических ситуаций, которые соединяют друг с другом:

а) различные виды творческой математической деятельности;

б) проведение компьютерных экспериментов;

в) выполнение лабораторных работ по математике;

г) поиск информации в Интернете;

д) креативные качества студентов;

е) создание художественных композиций с помощью аттракторов хаотических отображений (фракталов).

Отметим, что при выполнении ММИЗ:

1. У студентов формируется способность к абстрактному мышлению, поскольку они анализируют этапы изучения дисциплин, проявляют готовность к саморазвитию, самореализации, использованию творческого потенциала, развивают способность применять углубленные знания в области прикладной математики и информатики, изучая нелинейные динамические системы.

2. У студентов развивается способность и формируются навыки к преподаванию элементов теории хаоса и информатики в общеобразовательных организациях среднего образования и образовательных организациях высшего образования, поскольку они изучают хаотические функции последовательно по разработанной преподавателем методике;

3. Студенты оказываются в творческой лаборатории. Они выступают в роли математика, программиста, компьютерного художника и пользователя локальных и глобальных сетей. Парадигма разработки и выполнения ММИЗ «Изучение хаотических явлений как средство развития креативности студентов» возникла в связи с потребностью создания методики исследования нелинейных отображений. Она основана на идее создания ММИЗ для углубленного изучения дисциплин с использованием информационных и коммуникационных дисциплин (ИКТ).

Схема-план данного ММИЗ представлена на рисунке (рис. 1).

Этап 1. Перед выполнением ММИЗ студенту полезно познакомиться с понятием хаос и фрактал, анализируя сайты и дополнительную литературу. Теория хаоса и фрактальная геометрия в настоящее время бурно развиваются. Как оказалось, между фрактальными множествами и хаосом существует тесная связь. Следуя Кроноверу, приведем определение хаотичного отображения по Девани [Кроновер: 169].

Функция f называется хаотической на множестве F, если справедливы следующие правила:

(i) Если для любой пары U, V открытых множеств существует такое $n \geq 0$, что пересечение $f^{(n)}(U) \cap V$ не является пустым множеством (транзитивность).

Рис. 1. Схема-план ММИЗ

(ii) Периодические точки f в F (точки, для которых $f^{(p)}(x) = x$ при некотором положительном целом p) плотны в F.

(iii) f имеет *существенную зависимость от начальных условий*; то есть существует число $\delta > 0$ такое, что для любого x из F имеются точки y в F, как угодно близкие к x, такие, что $|f^{(k)}(x) - f^{(k)}(y)| \geq \delta$ для некоторого k. Таким образом, точки, первоначально близкие друг к другу, не остаются близкими при итерациях f.

Как оказалось, условие (iii) является избыточным. То есть из (i) и (ii) следует (iii) [Кроновер: 170].

Студентам полезно познакомиться с первыми примерами хаотических явлений, обнаруженными в прошлом веке. Одним из первых наблюдал хаос Лоренц.

Система Лоренца – непрерывная динамическая система, которую сейчас уже можно назвать знаменитой, – была исследована американским метеорологом-теоретиком Эдвардом Лоренцем в 1961 г. Она создавалась с целью построить упрощённую модель атмосферной конвекции для решения вопроса о том, возможен ли долгосрочный прогноз погоды. Он написал компьютерную программу для решения следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x' = -\sigma x + \sigma y \\ y' = rx - y - xz \quad \sigma = 10, \quad r = 28, \quad b = \dfrac{8}{3} \\ z' = -bz + xy \end{cases}$$

Согласно описанию эксперимента Лоренц вычислял значения решения в течение длительного времени, а затем изменил счет. Его заинтересовала особенность решения, которая возникала где-то в середине интервала счета, и поэтому он повторил вычисления. Лоренц слегка изменил начальные условия. Новые величины отличались от старых на ничтожную величину. Он вновь повторял и проверял вычисления, прежде чем осознал важность эксперимента. То, что он наблюдал, называется существенной зависимостью от начальных условий – основной характеристикой хаотического движения.

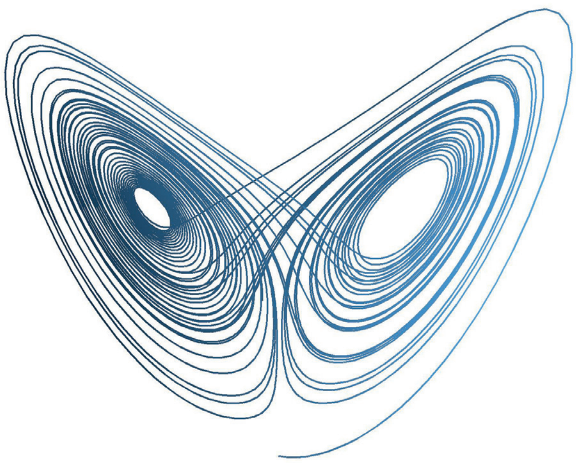

Рис. 2. Аттрактор Лоренца

Сам Лоренц разъяснил свое исследование в 1979 году, опубликовав статью с оригинальным названием: «Предсказуемость: может ли взмах крылышек бабочки в Бразилии привести к образованию торнадо в Техасе?»

Аттрактор, который он получил, в настоящее время носит имя Лоренца.

Студентам полезно узнать, что аттрактор Лоренца ограничен, имеет фрактальную структуру и обладает определенного типа симметрией.

Студенты должны убедиться, что хаотичные отображения проявляются и в дискретных динамических системах. Так, например, им следует доказать, что простейшая нелинейная функция $f(z)=z^2$ хаотична на своем множестве Жюлиа – единичной окружности с центром в начале координат.

При исследовании данной функции студенты убеждаются, что итерации разводят на значительное расстояние орбиты двух точек, расположенных сколь угодно близко друг к другу (существенная зависимость от начальных условий). Поскольку каждая итерация увеличивает длину дуги в два раза, то с некоторого момента окружность окажется подмножеством образа дуги некоторой итерации, и будет иметь место транзитивность. И, наконец, всюду плотность периодических точек будет выполняться, поскольку периодические ненулевые точки любого порядка – отталкивающие и находятся на единичной окружности, распределяясь на ней равномерно. Все эти ненулевые периодические точки будут отталкивающими, и их совокупность образует всюду плотное подмножество на единичной окружности. Таким образом, квадратичная функция будет хаотична на единичной окружности.

Студенты должны усвоить, что далеко не каждая функция хаотична, показав, например, что линейное отображение не будет хаотично на отрезке $F=[0;1]$. Действительно, положим: $f(x)=2x+1$, а $F=[0;1]$. Заметим, что $f^{(2)}(x)=4x+3$, $f^{(3)}(x)=8x+7$, … $f^{(p)}(x)=2px+(2^p-1)$, периодическими точками для данной функции будут точки вида $x=\dfrac{2^p-1}{2p}$, $p \in N$. Очевидно, что данные точки не являются всюду плотными на отрезке $F=[0;1]$. Следовательно, заданная функция не хаотична на отрезке $F=[0;1]$.

Этап 2. На данном этапе студентам следует познакомиться с хаотичностью на модифицированном множестве Кантора K^n тентообразной функции $f_n(x)=\begin{cases} n\cdot x, \; x\le \frac{1}{2} \\ n-n\cdot x, \; x>\frac{1}{2} \end{cases}$.

Покажем, что выполняются (i), (ii), (iii). Проверим сначала существенную зависимость от начальных условий. Возьмем $x \in K^n$, $\varepsilon=\dfrac{1}{3}$ и произвольное $\delta>0$. Пусть U – открытое множество, содержащее точку x. Тогда существуют такие числа $n_\delta \in N$, $\alpha \in R$, $\beta \in R$, $x\in[\alpha;\beta]\subset U$ и $[\alpha;\beta]\subset K^n_{n_\delta}$ (здесь $[\alpha;\beta]$ – один из составляющих отрезков множества $K^n_{n_\delta}$).

Студентам полезно самостоятельно показать, что $f_n^{(n_\delta)}([\alpha;\beta])=[0;1]$, где $f_n^{(n_\delta)}(x)$ есть линейная функция на отрезке $[\alpha;\beta]$, принимающая на его концах значение, равное либо нулю, либо единице. Так как $\alpha \in K_n^{n_\delta}$, $\beta \in K_n^{n_\delta}$, то либо $\left|f_n^{(n_\delta)}(\alpha)-f_n^{(n_\delta)}(x)\right|>\dfrac{1}{3}$, либо $\left|f_n^{(n_\delta)}(\beta)-f_n^{(n_\delta)}(x)\right|>\dfrac{1}{3}$. Существенная зависимость от начальных условий для функции $f_n(x)$ установлена.

Проверим теперь транзитивность отображения f_n. Пусть U, V – открытые множества в K^n. Тогда существуют такие $n_0 \in N$, $\alpha_1 \in R$, $\beta_1 \in R$: $[\alpha_1;\beta_1]\subset U$ и $[\alpha_1;\beta_1]\subset K^n_{n_0}$. Кроме того, существуют такие $m_0 \in N$, $\alpha_2 \in R$, $\beta_2 \in R$, что $[\alpha_2;\beta_2]\subset V$ и $[\alpha_2;\beta_2]\subset K^n_{m_0}$. Поскольку $f_n^{(n_0)}([\alpha_1;\beta_1])=[0;1]$, а $0\le\alpha_2\le 1$, $0\le\beta_2\le 1$, то пересечение $f_n^{(n_0)}(U)\cap V$ не пусто.

Здесь студентам предлагается подробно провести все выкладки.

В качестве упражнения студентам полезно предложить показать всюду плотность периодических точек на множестве Кантора.

Обобщением тентообразной функции является двумерное модифицированное преобразование Эно, задаваемое функцией $T_n\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-ax^2+y^{\frac{1}{n}}\\bx^n\end{pmatrix}$ $n=1, 2, 3$ … При $n=1$ получим классическое преобразование Эно $T_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-ax^2+y\\bx\end{pmatrix}$. Отметим, что при $n>1$ нелинейны обе переменные в отличие от классического преобразования Эно.

Компьютерная программа строит аттрактор Эно при различных значениях параметра a, $n=4$, $b=0{,}3$.

Возьмем, например, $a=0{,}5$ и получим аттрактор Эно (рис. 3) с наличием признака хаоса.

Суть компьютерного эксперимента: рассматривается точка $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ и исследуется ее орбита.

Здесь студентам следует исследовать аттрактор Эно при различных значениях параметров и определить те значения параметров, когда начинают наблюдаться признаки хаоса.

Этап 3. Интересные примеры хаотических отображений наблюдаются для функций комплексной переменной. Установим хаотичность функции $h(z)=z^2$ на единичной окружности S. Заметим, что если $x=e^{i\theta}$, то $h^{(n)}(x)=e^{2^n\cdot\theta\cdot i}$.

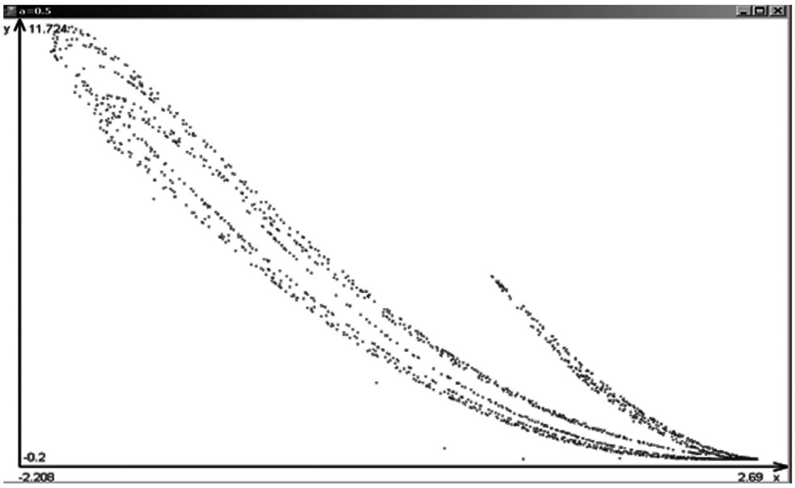

Рис. 3. Наличие признаков хаоса орбиты точки $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ при a = 0,5, b = 0,3

Возьмем $\delta > 0$, $\varepsilon = \dfrac{2}{3}$. Пусть $x \in S$. Найдем такие $n_\delta \in N$ и $y_{n_\delta} = e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n_\delta}}\right)} \in S$, чтобы выполнялись условие расстояния $\rho(x, y_{n_\delta}) < \delta$. Тогда $h^{(n_\delta)}(x) = e^{2^{n_\delta} \cdot \theta \cdot i}$ и $h^{(n_\delta)}(y_{n_\delta}) = e^{2^{n_\delta}\left(\theta + \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n_\delta}}\right) \cdot i} = e^{\left(2^{n_\delta} \cdot \theta + \frac{\pi}{3}\right) \cdot i}$ и $\rho\left(h^{(n_\delta)}(x), h^{(n_\delta)}(y_{n_\delta})\right) = 1 > \varepsilon = \dfrac{2}{3}$. Следовательно, $h(z)$ обладает существенной зависимостью от начальных условий на S.

Проверим транзитивность отображения $h(z)$ на S. Пусть U и V – открытые множества в S. Нетрудно заметить, что существует такое n, что $h^{(n)}(U) \supset S$. Следовательно, $h^{(n)}(U) \cap V$ не пусто и транзитивность $h(z)$ доказана.

Всюду плотность периодических точек будет выполняться. Как уже отмечалось, периодические точки любого порядка будут находиться на единичной окружности и распределяться на ней равномерно. Все эти ненулевые периодические точки будут отталкивающими, и их совокупность образует всюду плотное подмножество на единичной окружности. Таким образом, квадратичная функция будет хаотична на единичной окружности.

Студенты здесь должны выполнить полностью все математические выкладки и построить множество Жюлиа функции $h(z) = z^2$.

Покажем, что для функции $f(z) = z^2 - 2$ множеством Жюлиа будет отрезок $[-2; 2]$, на котором данная функция хаотична. Заметим сначала, что если $z = x \in R$, то множество значений $E(f)$ функции f, заданной на отрезке $[-2; 2]$, также содержится в данном отрезке $(f([-2; 2]) \subset [-2; 2])$ (рис. 4).

Рассмотрим отображение $h(w) = w + \dfrac{1}{w}$. Заметим, что $z = h(w)$ отображает единичную окружность S радиуса *1* с центром в начале координат $(|w| = 1)$ на отрезок $[-2; 2]$. Действительно, пусть $w = e^{i\theta}$, $\theta \in [0; 2\pi]$. Тогда, используя формулы Эйлера, получим:

$$z = h(w) = h(e^{i\theta}) = e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) +$$
$$+\cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = 2\cos(\theta).$$

Таким образом, если $\theta \in [0; 2\pi]$, $w = e^{i\theta} \in S$, то $2\cos(\theta) \in [-2; 2]$. Отметим, что $2\cos(\theta)$ имеет два прообраза $w_1 = e^{i\theta}$, $w_2 = e^{-i\theta}$. Далее, если $w \notin S$, то $z = h(w) \notin [-2; 2]$. Действительно, если $z \notin [-2; 2]$ и $z = h(w) = w + \dfrac{1}{w}$, тогда получим $w^2 - wz + 1 = 0$. Согласно теореме Виета корни этого уравнения w_1, w_2 удовлетворяют равенству $w_1 \cdot w_2 = 1$. Поскольку $z \notin [-2; 2]$, то $w_1 \notin S$, $w_2 \notin S$ и либо $|w_1| > 1$, либо $|w_2| > 1$ (то есть одно из решений уравнения

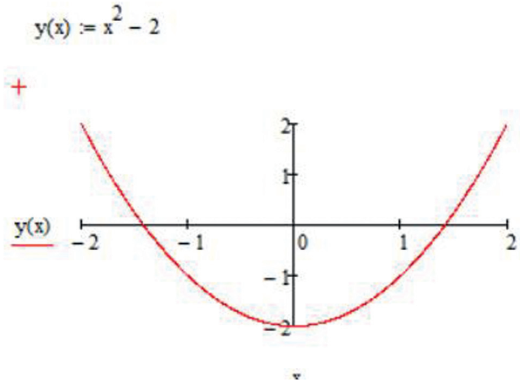

Рис. 4. График функции $f(z) = z^2 - 2$

$w^2 - wz + 1 = 0$ лежит внутри единичного круга, а другое – вне его). Нетрудно проверить, что $h(w) = w + \frac{1}{w}$ отображает внешность замкнутого единичного круга изоморфно на дополнение $C \setminus [-2;\ 2]$. Далее имеем:

$$h(w^2) = w^2 + \frac{1}{w^2} = \left(w + \frac{1}{w}\right)^2 - 2 = h^2(w) - 2 = f(h(w)).$$

Рассмотрим орбиту точки $z = h(w)$, $|w| > 1$. Имеем:

$$f^{(2)}(h(w)) = f(f(h(w))) = f(h(w^2)) =$$
$$= h(w^4) = w^4 + \frac{1}{w^4} = w^{2^2} + \frac{1}{w^{2^2}}.$$

Далее находим

$$f^{(3)}\left(h(w)\right) = f\left(f^{(2)}\left(h(w)\right)\right) = f\left(h\left(w^4\right)\right) =$$
$$= h\left(w^8\right) = w^8 + \frac{1}{w^8} = w^{2^3} + \frac{1}{w^{2^3}}\omega.$$

Аналогично, продолжая данный процесс, получим $f^{(n)}(h(w)) = f(f^{(n-1)}(h(w))) = w^{2^n} + \frac{1}{w^{2^n}}$ и т. д. Таким образом, если $z \notin [-2;\ 2]$, то

$$\lim_{n\to\infty}\left(f^{(n)}(h(w))\right) = \lim_{n\to\infty}\left(f^{(n)}(z)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(w^{2^n} + \frac{1}{w^{2^n}}\right) = \infty.$$

Поскольку $(f([-2;\ 2]) \subset [-2;\ 2])$, то для каждого $z \in [-2;\ 2]$ орбита точки $z = h(w)$ ограничена. Таким образом,

$$j(f) = \partial\left(z \in C : f^{(n)}(z) \to \infty,\ n \to \infty\right) = [-2;\ 2].$$

То есть множество Жюлиа для функции $f(z) = z^2 - 2$ является отрезок $[-2;\ 2]$.

Как известно, множество Жюлиа является замыканием периодических отталкивающих точек порождающей его функции. Доказана всюду плотность периодических точек.

Докажем теперь транзитивность. Известно, что если $\omega \in J(f)$, то $J(f)$ является замыканием $\bigcup_{n=1}^{\infty}(f^{(n)})^{-1}(\omega))$. Пусть U, V – открытые множества в множестве $J(f)$. Пусть точка ω принадлежит множеству $V \bigcap j(f)$. Поскольку $J(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(f^{(n)})^{-1}(\omega))$, то существует такое натуральное число n, что $\left(f^{(n)}\right)^{-1}(\omega)\bigcap U$ не пусто. Пусть точка $u \in \left(f^{(n)}\right)^{-1}(\omega)\bigcap U$. В таком случае $f^{(n)}(u) = \omega$. Поскольку $\omega \in V$, то множество $f^{(n)}(U)\bigcap V$ не пусто и транзитивность доказана. В силу [1] для функции $f(z) = z^2 - 2$ существенная зависимость от начальных условий вытекает из транзитивности и всюду плотности периодических отталкивающих точек. Таким образом, функция $f(z) = z^2 - 2$ хаотична на отрезке $[-2;\ 2]$.

Студенты должны все выкладки изложить подробно.

Этап 4. Студентам следует убедиться, что при определении хаоса должны выполняться некоторые условия. Например, условие, требующее вложения образа пространства X в это пространство как его подмножество при преобразовании $f_n(x)$. Действительно, $f_n(x)$ должна удовлетворять условию $f_n(X) \subseteq X$. Если данное условие не будет выполнено, то хаотичности данной функции на множестве X может не быть. Покажем, например, что на отрезке $[0;\ 1]$ функция $f_3(x)$ хаотичной не будет. Возьмем открытые множества $V = \left(0;\ \frac{1}{10}\right)$ и $U = \left(\frac{11}{30};\ \frac{19}{30}\right)$. Пусть точка $y \in U$. Возможны два случая: 1) $\frac{11}{30} < y < \frac{1}{2}$ и 2) $\frac{1}{2} < y < \frac{19}{30}$.

В первом случае имеем $f_3(y) = 3y$. Таким образом, $\frac{11}{10} < f_3(y) < \frac{3}{2}$. Далее, $f_3^{(2)}(y) = 3 - 3f_3(y) < 0$. Следовательно, $f_3^{(3)}(y) < 0$, $f_3^{(4)}(y) < 0$, …, $f_3^{(n)}(y) < 0$, …

Во втором случае имеем $f_3(y) = 3 - 3y$. Таким образом, и в данном случае $1\frac{1}{10} < f_3(y) < 1\frac{1}{2}$. Далее, $f_3^{(2)}(y) = 3 - 3f_3(y) < 0$. Следовательно, имеем $f_3^{(3)}(y) < 0$, $f_3^{(4)}(y) < 0$, …, $f_3^{(n)}(y) < 0$, …

Таким образом, для каждого натурального $n \geq 2$, $f_3^{(n)}(U) \cap V = \varnothing$. Если $z \in f_3(U)$, то $z > 1$. Следовательно, $f_3(U) \cap V = \varnothing$. Наконец, $f_3^{(0)}(U) \bigcap V = U \cap V = \varnothing$. Таким образом, нарушается условие транзитивности. И, следовательно, функция

$$f_3(x) = \begin{cases} 3 \cdot x, & x \leq \frac{1}{2} \\ 3 - 3 \cdot x, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

не является хаотичной на отрезке $[0;\ 1]$.

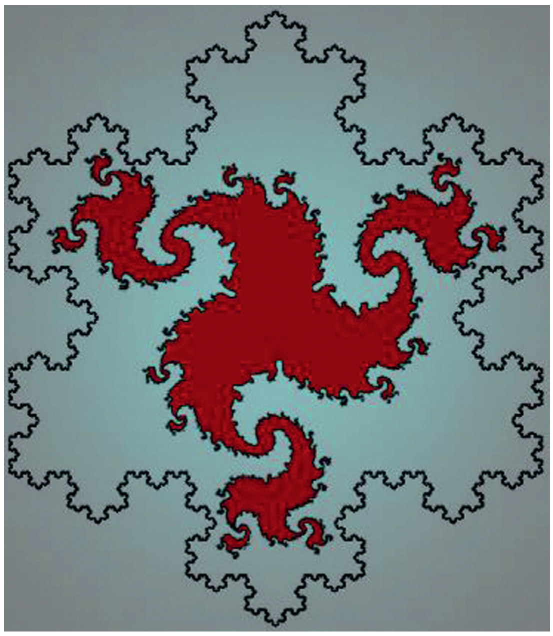

Рис. 5. Дракон

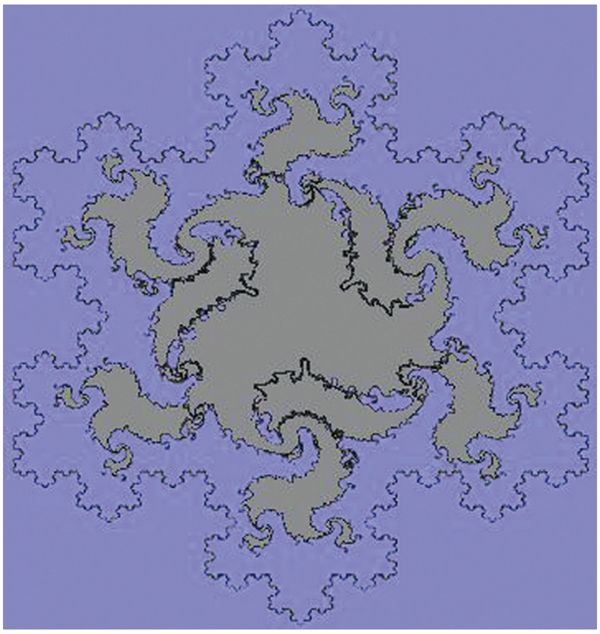

Рис. 6. Спрут

Для развития креативности студентам полезно предложить следующие задачи:

1. Найти множество Жюлиа функции $f(z) = z^3 - 3z$.

2. Разработать алгоритм построения множества Жюлиа функции, указанной в п. 1.

3. Показать, что указанная в п. 1 функция хаотична на своем множестве Жюлиа.

Множества Жюлиа являются одними из самых красивых математических объектов. Здесь студентам следует предложить создать несколько художественных композиций с использованием множеств Жюлиа.

Например, они могут изобразить композиции, подобные изображенным на рисунке 5 «Дракон» и рисунке 6 «Спрут».

Дадим краткое описание создания художественных композиций с помощью заполняющих множеств Жюлиа. Композиция (рис. 5) получена наложением двух множеств: классического фрактала «Снежинка Коха» и заполняющегося множества Жюлиа, полученного при итерировании функции $f(z) = z^3 - 0{,}15 + 0{,}827 \cdot i$. Построение композиции происходит с помощью среды программирования Delphi и графического редактора Adobe Photoshop:

1) в среде Delphi строятся с помощью соответствующих программ каждый из вышеуказанных фракталов;

2) с помощью Adobe Photoshop данные фракталы налагаются друг на друга.

2) заполняющее множество Жюлиа, полученное при итерировании функции $f(z) = z^3 - 0{,}15 + 0{,}827 \cdot i$, поворачивается на 180º.

Использование ИКТ при построении множеств Жюлиа дает возможность визуализировать математические объекты, которые в большинстве случаев невозможно построить без компьютерных средств.

В заключение отметим, что при выполнении данного ММИЗ у студентов развиваются такие креативные качества, как гибкость, критичность и оригинальность мышления, совершенствуется интуиция и вырабатывается мотивация как к математике, так и к информатике. При изучении хаотических отображений интеграция математики и программирования очевидна, что указывает студентам на неразрывную связь данных дисциплин.

Список литературы

Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Москва: Постмаркет, 2000. 352 с.

Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. 656 с.

Минлор Дж. Голоморфная динамика. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. 320 с.

Пайтген Х.О. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. Москва: Мир, 1993. 176 с.

Секованов В.С. Элементы теории фрактальных множеств. 5-е изд., перераб. и доп. Москва: Либроком, 2013. 248 с.

Секованов В.С. Элементы теории дискретных динамических систем: учеб. пособие. Санкт-Петербург: Лань, 2017. 180 с.

Секованов В.С. О множествах Жюлиа некоторых рациональных функций // Вестник КГУ им. Н.А. Некрасова. 2012. № 2. С. 23–28.

Секованов В.С. Что такое фрактальная геометрия? Москва: Ленанд, 2016. 272 с.

Секованов В.С. О некоторых дискретных нелинейных динамических системах // Фундаментальная и прикладная математика; Центр новых информационных технологий МГУ им. М.В. Ломоносова. Москва: Открытые системы, 2016. Т. 21, вып. 3. С. 185–199.

Секованов В.С., Смирнова А.О. Развитие гибкости мышления студентов при изучении структуры неподвижных точек полиномов комплексной переменной // Вестник Костромского государственного университета им. Н.А. Некрасова. 2016. № 3. С. 189–192.

Секованов В.С. Фрактальная геометрия. Преподавание, задачи, алгоритмы, синергетика, эстетика, приложения: учеб. пособие. Санкт-Петербург: Лань, 2019. 180 с.

Секованов В.С., *Уваров А.Д., Елкин Д.В.* Изучение гладких множеств Жюлиа как средство развития креативности и исследовательской компетентности студентов // Ярославский педагогический вестник. 2015. № 3. С. 70–77.

Секованов В.С., *Митенева С.Ф., Рыбина Л.Б.* Выполнение многоэтапного математико-информационного задания «Топологическая и фрактальная размерности множеств» как средство развития креативности и формирования компетенции студентов // Вестник Костромского государственного университета. Сер.: Педагогика, Психология, Социокинетика. 2017. Т. 23, № 2. С. 140–144.

Секованов В.С., *Салов А.Л., Самохов Е.А.* Использование кластера при исследовании фрактальных множеств на комплексной плоскости // Актуальные проблемы преподавания информационных и естественнонаучных дисциплин: материалы V Всерос. науч.-метод. конф. Кострома, 2011. С. 85–103.

Смирнов Е.И., Секованов В.С., *Миронкин Д.П.* Многоэтапные математико-информационные задачи, как средство развития креативности учащихся профильных математических классов // Ярославский педагогический вестник. 2014. Т. 2, № 1. С. 124–129.

Секованов В.С. О множествах Жюлиа функций, имеющих неподвижные параболические точки // Фундаментальная и прикладная математика. 2021. Т. 23, вып. 4. С. 163–176.

Секованов В.С. Голоморфная динамика: учеб. пособие для вузов. Санкт-Петербург: Лань, 2021. 168 с.

Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы (миниатюры из бесконечного рая). Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотичная динамика», 2001. 528 с.

Шустер Г. Детерминированный хаос. Москва: Мир, 1988. 240 с.

Falconer K. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. New York, John Wiley, 1990, 337 p.

Sekovanov V.S., Smirnov E.I., Ivkov V.A. Visual modeling of nonlinear mapping of fractal and chaos. 2 International Vultimidisciplinary Scientific conference on Social Sciences & Arts Sgem, 2015. Albena, Bulgaria, 2015, vol. 1, pp. 263–272.

Sekovanov V.S. On Some Discrete nonlinear dynamical systems. Jornal of Matematical Sciences (United States), 2019 (March), vol. 237, No. 3, pp. 460–472.

References

Kronover R.M. *Fraktaly i khaos v dinamicheskikh sistemakh* [Fractals and chaos in dynamic systems]. Moscow, Postmarket Publ., 2000, 352 p. (In Russ.)

Mandel'brot B. *Fraktal'naia geometriia prirody* [Fractal geometry of nature]. Moscow, Izhevsk, NITs «Reguliarnaia i khaoticheskaia dinamika» Publ., 2010, 656 p. (In Russ.)

Minlor Dzh. *Golomorfnaia dinamika* [Holomorphic dynamics]. Moscow, Izhevsk, NITs «Reguliarnaia i khaoticheskaia dinamika» Publ., 2000, 320 p. (In Russ.)

Paitgen Kh. O. *Krasota fraktalov. Obrazy kompleksnykh dinamicheskikh sistem* [The beauty of fractals. Images of complex dynamic systems]. Moscow, Mir Publ., 1993, 176 p. (In Russ.)

Sekovanov V.S. *Elementy teorii fraktal'nykh mnozhestv* [Elements of fractal set theory], 5-e izd., pererab. i dop. Moscow, Librokom Publ., 2013, 248 p. (In Russ.)

Sekovanov V.S. *Elementy teorii diskretnykh dinamicheskikh system*: *uchebnoe posobie* [Elements of the theory of discrete dynamical systems: study guide]. Saint Petersburg, Lan' Publ., 2017, 180 p. (In Russ.)

Sekovanov V.S. *O mnozhestvakh Zhiulia nekotorykh ratsional'nykh funktsii* [On the Julia sets of some rational functions]. *Vestnik KGU im. N.A. Nekrasova* [Bulletin of the N.A. Nekrasov KSU], 2012, № 2, pp. 23–28. (In Russ.)

Sekovanov V.S. *Chto takoe fraktal'naia geometriia* [What is fractal geometry]? Moscow, Lenand Publ., 2016, 272 p. (In Russ.)

Sekovanov V.S. *O nekotorykh diskretnykh nelineinykh dinamicheskikh sistemakh* [On some discrete nonlinear dynamical systems]. *Fundamental'naia i prikladnaia matematika; Tsentr novykh informatsionnykh tekhnologii MGU im. M.V. Lomonosova* [Fundamental and applied mathematics; Center for New Information Technologies of Lomonosov Moscow State University]. Moscow, Izdatel'skii dom «Otkrytye sistemy», 2016, vol. 21, № 3, pp. 185–199. (In Russ.)

Sekovanov V.S., Smirnova A.O. *Razvitie gibkosti myshleniia studentov pri izuchenii struktury nepodvizhnykh tochek polinomov kompleksnoi peremennoi* [Development of flexibility of students' thinking when studying the structure of fixed points of polynomials of a complex variable]. *Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo universiteta im. N.A. Nekrasova* [Bulletin of the Kostroma State University named after N.A. Nekrasov], 2016, № 3, pp. 189–192. (In Russ.)

Sekovanov V.S. *Fraktal'naia geometriia. Prepodavanie, zadachi, algoritmy, sinergetika, estetika, prilozheniia: uchebnoe posobie* [Fractal geometry. Teaching, tasks, algorithms, synergetics, aesthetics, applications: study guide]. Saint Petersburg, Lan' Publ., 2019, 180 p. (In Russ.)

Sekovanov V.S., Uvarov A.D., Elkin D.V. *Izuchenie gladkikh mnozhestv Zhiulia kak sredstvo razvitiia kreativnosti i issledovatel'skoi kompetentnosti studentov* [The study of smooth Julia sets as a means of developing creativity and research competence of students]. *Iaroslavskii pedagogicheskii vestnik* [Yaroslavl Pedagogical Bulletin], 2015, № 3, pp. 70–77. (In Russ.)

Sekovanov V.S., Miteneva S.F., Rybina L.B. *Vypolnenie mnogoetapnogo matematiko-informatsionnogo zadaniia «Topologicheskaia i fraktal'naia razmernosti mnozhestv» kak sredstvo razvitiia kreativnosti i formirovaniia kompetentsii student.* [Performing a multi-stage mathematical and informational task «Topological and fractal dimensions of sets» as a means of developing creativity and forming students' competence]. *Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriia:*

Pedagogika, Psikhologiia, Sotsiokinetika [Bulletin of Kostroma State University. Series: Pedagogy, Psychology], 2017, vol. 23, № 2, pp. 140–144. (In Russ.)

Sekovanov V.S., Salov A.L., Samokhov E.A. *Ispol'zovanie klastera pri issledovanii fraktal'nykh mnozhestv na kompleksnoi ploskosti* [Using a cluster in the study of fractal sets on a complex plane]. *Aktual'nye problemy prepodavaniia informatsionnykh i estestvennonauchnykh distsiplin: materialy V Vseros. nauch.-metod. konf.* [Actual problems of teaching information and natural science disciplines: materials of the V All-Russian Scientific and Methodological Conference], 2011, pp. 85–103. (In Russ.)

Smirnov E.I., Sekovanov V.S., Mironkin D.P. *Mnogoetapnye matematiko-informatsionnye zadachi, kak sredstvo razvitiia kreativnosti uchashchikhsia profil'nykh matematicheskikh klassov* [Multi-stage mathematical and informational tasks as a means of developing the creativity of students of specialized mathematical classes]. *Iaroslavskii pedagogicheskii vestnik* [Yaroslavl Pedagogical Bulletin], 2014, vol. 2, № 1, pp. 124–129. (In Russ.)

Sekovanov V.S. *O mnozhestvakh Zhiulia funktsii, imeiushchikh nepodvizhnye parabolicheskie tochki* [On sets of Julia functions having fixed parabolic points]. *Fundamental'naia i prikladnaia matematika* [Fundamental and Applied mathematics], 2021, vol. 23, № 4, pp. 163–176. (In Russ.)

Sekovanov V.S. *Golomorfnaia dinamika: uchebnoe posobie dlia vuzov* [Holomorphic dynamics: a textbook for universities]. Saint Petersburg, Lan' Publ., 2021, 168 p. (In Russ.)

Shreder M. *Fraktaly, khaos, stepennye zakony (miniatiury iz beskonechnogo raia)* [Fractals, chaos, power laws (miniatures from the infinite paradise)]. Moscow, Izhevsk, NITs «Reguliarnaia i khaoticheskaia dinamika» Publ., 2001, 528 p. (In Russ.)

Shuster G. *Determinirovannyi khaos* [Deterministic chaos]. Moscow, Mir Publ., 1988, 240 p. (In Russ.)

Статья поступила в редакцию 11.08.2022; одобрена после рецензирования 23.09.2022; принята к публикации 25.09.2022.

The article was submitted 11.08.2022; approved after reviewing 23.09.2022; accepted for publication 25.09.2022.