Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социокинетика. 2022. Т. 28, № 2. С. 60–68. ISSN 2073-1426
Vestnik of Kostroma State University. Series: Pedagogy. Psychology. Sociokinetics, 2022, vol. 28, № 2, pp. 60–68. ISSN 2073-1426
Научная статья
УДК 372. 8:51
https://doi.org/10.34216/2073-1426-2022-28-2-60-68

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ И В ПЕРСПЕКТИВНОЙ МОДЕЛИ ЕГЭ

Бабенко Алена Сергеевна, кандидат педагогических наук, Костромской государственный университет, Кострома, Россия, alenbabenko@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0001-6267-0497

Марголина Наталия Львовна, кандидат физико-математических наук, Костромской государственный университет, Кострома, Россия, nmargolina@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-8593-2987

Матыцина Татьяна Николаевна, кандидат физико-математических наук, Костромской государственный университет, Кострома, Россия, t_matycina@ksu.edu.ru, https://orcid.org/0000-0003-1090-003X

Смирнова Алена Олеговна, Костромской государственный университет, Кострома, Россия, aleosmir@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-9039-8192

Ширяев Кирилл Евгеньевич, кандидат физико-математических наук, Костромской государственный университет, Кострома, Россия, shiryaev4@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-5495-6820

Аннотация. Статья посвящена использованию понятия комплексного числа в школьном курсе математики. До недавнего времени тематика комплексных чисел не включалась в государственную итоговую аттестацию, но осваивалась в классах с углубленным изучением математики. В связи с введением в перспективную модель единого государственного экзамена задачи, связанные с этим понятием, ныне приобретают острую актуальность. В статье в первую очередь затрагивается анализ изложения материала в школьных учебниках, в особенности понятия комплексного числа. Затем приведено несколько примеров решения задач, которые были представлены в перспективной модели единого государственного экзамена по математике, причем с использованием как аналитической, так и геометрической интерпретации комплексного числа. Кроме того, показываются различные подходы к решению задания как алгебраическими (метод оценки) и геометрическими (нахождение высоты в треугольнике, метод подобия, методы аналитической геометрии) методами, а также методами математического анализа (нахождение наибольшего или наименьшего значения с помощью производной). Статья также содержит некоторые методические рекомендации для подготовки по данной теме и систему заданий, которую можно предложить как учителям при подготовке к экзамену, так и обучающимся для закрепления навыков решения заданий подобного типа.

Ключевые слова: перспективная модель, комплексные числа, алгебраическая форма комплексного числа, государственная итоговая аттестация, единый государственный экзамен.

Для цитирования: Бабенко А.С., Марголина Н.Л., Матыцина Т.Н., Смирнова А.О., Ширяев К.Е. Комплексные числа в школьном курсе математики и в перспективной модели ЕГЭ // Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социокинетика. 2022. Т. 28, № 2. С. 60–68. https://doi.org/10.34216/2073-1426-2022-28-2-60-68

Research Article

COMPLEX NUMBERS IN THE SCHOOL COURSE OF MATHEMATICS AND IN THE PERSPECTIVE MODEL OF THE FINAL EXAM

Alena S. Babenko, Candidate of Pedagogic Sciences, Kostroma State University, Kostroma, Russia, alenbabenko@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0001-6267-0497

Natalia L. Margolina, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Kostroma State University, Kostroma, Russia, nmargolina@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-8593-2987

Tatyana N. Matytsina, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Kostroma State University, Kostroma, Russia, t_matycina@ksu.edu.ru, https://orcid.org/0000-0003-1090-003X

Alena O. Smirnova, Kostroma State University, Kostroma, Russia, aleosmir@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-9039-8192

Kirill E. Shiryaev, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Kostroma State University, Kostroma, Russia, shiryaev4@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-5495-6820

Abstract. The article is devoted to the use of the concept of a complex number in a school Mathematics course. Until recently, the topic of complex numbers had not been included in the state final exam, however studied in classes with in-depth study of mathematics. In connection with the introduction of tasks related to this concept into the prospective model of the unified state exam, it is now becoming topical. The article primarily touches upon the analysis of the presentation of material in school textbooks, in particular the concept of a complex number. Then there are several examples of problem solving, which was presented in a promising model of the unified state exam in Mathematics, using both analytical and geometric interpretation of a complex number. In addition, various approaches to solving the problem are shown, both algebraic (estimation method) and geometric (finding the altitude in a triangle, similarity method, methods of analytical geometry) methods, as well as methods of mathematical analysis (finding the largest or smallest value using the derivative). The article also contains some methodological recommendations for preparing on this topic and a system of tasks that can be offered both to teachers in preparing for the exam, and to pupils to consolidate the skill of solving tasks of this type.

Keywords: perspective model, complex numbers, algebraic form of complex number, state final certification, unified state exam.

For citation: Babenko A.S., Margolina N.L., Matytsina T.N., Smirnova A.O., Shiryaev K.E. Complex numbers in the school course of Mathematics and in the perspective model of the final exam. Vestnik of Kostroma State University. Series: Pedagogy. Psychology. Sociokinetics, 2022, vol. 28, № 2, pp. 60–68. https://doi.org/10.34216/2073-1426-2022-28-2-60-68

Математика – наука многогранная. Многие математические дисциплины совершенно не похожи одна на другую, и только на высоком уровне познания открывается некое единство. В то же время о связи математических дисциплин ведется много интересных и продуктивных дискуссий [Бабенко, Марголина, Матыцина, Ширяев, 2019г: 11; Бабенко, Марголина, Матыцина, Ширяев, 2019б: 130; Бабенко, Марголина, Матыцина, Ширяев, 2019а: 14]. При этом серьезное математическое образование (как и любое образование вообще) обеспечивается непрерывностью математических дисциплин, начиная от арифметики в начальной школе (а лучше еще раньше) и далее через школьные алгебру, начала анализа и геометрию сквозь институтские программы (которые, увы, подвергаются все большим и большим «оптимизациям», приводящим к сокращению часов) к совсем уж специальным и экзотическим математической логике и теории чисел. Заметим, что последние дисциплины, считающиеся даже среди большинства математиков самыми сложными, в то же время являются и самыми понятными на элементарном, скорее даже подсознательном уровне, поскольку именно с арифметики (операции с числами, чем не примитивная теория чисел) и простейших математических задачек «на логику» и начинается математическое образование ребенка (о непрерывности математического образования можно прочитать, например, в [Бабенко, Кузнецова, Ширяев: 10; Бабенко, Марголина, Матыцина, Ширяев, 2019в: 133; Агеева, Матыцина, Ширяев: 109]).

Одним из ключевых вопросов здесь является проблема соответствия вводимых математических понятий уровню математического образования обучающегося. Например, введение комплексных чисел при изучении квадратных уравнений, скорее всего, приведет к «каше» в голове ученика, а вот когда ученики привыкнут к тому, что при отрицательном дискриминанте решений нет, демонстрация корня из отрицательного числа, скорее всего, их заинтересует (более подробно об этом см.: [Бабенко, Марголина, Матыцина, Ширяев, 2020: 154]). Вообще, комплексные числа – одна из наиболее ярких тем, где даже на школьном уровне хорошо видна связь анализа и геометрии при некой специфичности самого объекта изучения.

В 2021 годы была опубликована Перспективная модель контрольно-измерительных материалов (КИМ) единого государственного экзамена (ЕГЭ) по математике 2022 года [Перспективные модели: 1], в которой появилось задание, связанное с комплексными числами. Данная тема изучается в программе 10–11 классов с углубленным изучением математики и включена в учебники, соответствующие требованиям Федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования. Заметим, что тема «Комплексные числа» не нова для школьной математики, однако она становится более актуальной при освоении школьного курса алгебры в связи с будущим включением задания по данной теме.

Согласно примерной основной образовательной программе среднего общего образования в разделе «Числа и выражения» на углубленном уровне отмечается, что выпускник получит возможность научиться применять при решении задач простейшие функции комплексной переменной как геометрические преобразования, при этом иметь базовые представления о множестве комплексных чисел [Примерная основная образовательная программа: 96].

При изучении математики на углубленном уровне предъявляются требования, соответствующие направлению «Математика для профессиональной деятельности»; вместе с тем выпускник получает возможность изучить математику на гораздо более высоком уровне, что создаст фундамент для дальнейшего серьезного изучения математики в вузе.

По теме «Комплексные числа» обучающиеся получают первичные представления о множестве комплексных чисел; учатся выполнять действия с комплексными числами, находить комплексно сопряженные числа, модуль и аргумент числа, записывать в тригонометрической форме комплексные числа; решать уравнения в комплексных числах. Данная тема расширяет у обучающихся представление о числе, которое является абстрактным понятием и формировалось у общества тысячелетиями.

Во всех учебниках с грифом ФГОС и без него излагается теоретический материал и приводится система заданий по данным подтемам, а также задания по изображению кривых и областей на комплексной плоскости. Отличительной особенностью по изложению данной темы в учебниках является определение комплексного числа, но во всех – дается алгебраическая форма комплексного числа, что является очень важным при выполнении задания в ЕГЭ, где необходимо выполнить вычисления и преобразования (согласно спецификации КИМ по математике).

Комплексные числа определяются через ближайший род и видовое отличие. В качестве ближайшего рода выбирается:

– элемент множества комплексных чисел, при этом множество комплексных чисел вводится аксиоматически (упорядоченная пара вещественных чисел с заданными на нем операциями сложения и умножения, удовлетворяющие нескольким условиям) [Пратусевич: 217; Алгебра 2009: 380; Виленкин: 188];

– вектор с началом в начале координат [Алгебра 2019: 119];

– алгебраическая форма комплексного числа [Мордкович: 243; Муравин: 204; Колягин: 101].

Чтобы проверить, на каком уровне сформированы предметные образовательные результаты у обучающихся по теме «Комплексные числа», и понять, насколько они усвоили само понятие комплексных чисел и действия над ними, было введено задание в КИМ ЕГЭ по математике 2022 г. в Перспективной модели. Рассмотрим пример номер 11 такого задания из демонстрационного варианта [Перспективные модели: 3]. Приведем различные варианты и подходы к его решению.

Задание 11. Про комплексное число z известно, что $|z-4-7i|=|z+4-i|$. Найдите наименьшее значение $|z|$.

Решение. Рассмотрим равенство $|z-4-7i|=|z+4-i|$. Для работы с данным равенством будем использовать определение комплексного числа, согласно которому $z=x+iy$, где $x, y \in R, i=\sqrt{-1}$. Выполним замену в данном равенстве. Получим выражение вида: $|x+iy-4-7i|=|x+iy+4-i|$. Выделим действительную и мнимую части комплексных чисел, расположенных под знаком модуля

$$|(x-4)+i(y-7)|=|(x+4)+i(y-1)|$$

и воспользуемся определением модуля комплексного числа

$$\sqrt{(x-4)^2+(y-7)^2}=\sqrt{(x+4)^2+(y-1)^2}.$$

Возведем обе части данного равенства в квадрат:

$$\left(\sqrt{(x-4)^2+(y-7)^2}\right)^2=\left(\sqrt{(x+4)^2+(y-1)^2}\right)^2.$$

Получим $(x-4)^2+(y-7)^2=(x+4)^2+(y-1)^2$.

Теперь воспользуемся формулами сокращенного умножения и приведем подобные слагаемые:

$$x^2-8x+16+y^2-14y+49=x^2+8x+16+y^2-2y+1;$$

$$-8x-14y+49=8x-2y+1;$$

$$-16x-12y+48=0;$$

$$4x+3y-12=0;$$

$$y=4-\frac{4}{3}x.$$

Получили уравнение прямой. Вывод: множество всех комплексных чисел z, удовлетворяющих равенству $|z-4-7i|=|z+4-i|$, изображаются на координатной плоскости прямой, заданной уравнением $y=4-\frac{4}{3}x$.

Рассмотрим модуль комплексного числа, по определению $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. Выполним замену: $y=4-\frac{4}{3}x$. Тогда имеем $|z|=\sqrt{x^2+\left(4-\frac{4}{3}x\right)^2}$. Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые:

$$|z|=\sqrt{x^2+\left(4-\frac{4}{3}x\right)^2}=\sqrt{x^2+16-\frac{32}{3}x+\frac{16}{9}x^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{25}{9}x^2-\frac{32}{3}x+16.}$$

Далее решение данной задачи возможно несколькими способами.

I способ решения.

По условию задачи необходимо найти наименьшее значение $|z|$, поэтому преобразуем подкоренное выражение, выделив полный квадрат, и выполним оценку $|z|$.

$$|z|=\sqrt{\frac{25}{9}x^2-\frac{32}{3}x+16}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{5x}{3}\right)^2-2\cdot\frac{5x}{3}\cdot\frac{16}{5}+\left(\frac{16}{5}\right)^2-\left(\frac{16}{5}\right)^2+16}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{5x}{3}-\frac{16}{5}\right)^2+16-\left(\frac{16}{5}\right)^2}\geq\sqrt{16-\left(\frac{16}{5}\right)^2}=$$

$$= \sqrt{16\cdot\left(1-\frac{16}{25}\right)} = \sqrt{16\cdot\frac{9}{25}} = \frac{4\cdot 3}{5} = 2,4.$$

Таким образом, получили оценку модуля комплексного числа, а именно $|z| \ge 2,4$. А значит, наименьшее значение $|z|$ равно 2,4.

Ответ: 2,4

II способ решения.

Будем рассматривать модуль комплексного числа z как функцию одной действительной переменной x, где $x \in R$. По условию задачи необходимо найти наименьшее значение $|z|$, то есть наименьшее значение функции $f(x) = \sqrt{\frac{25}{9}x^2 - \frac{32}{3}x + 16}$. Так как функция $y = \sqrt{x}$ возрастающая, а подкоренное выражение положительно при всех значениях переменной x, то заданная функция $f(x)$ достигает наименьшего значения в той точке, в которой достигает наименьшего значения подкоренное выражение $\frac{25}{9}x^2 - \frac{32}{3}x + 16$.

Рассмотрим квадратичную функцию $y = \frac{25}{9}x^2 - \frac{32}{3}x + 16$. Графиком является парабола, ветви которой направлены вверх (так как $a = \frac{25}{9} > 0$). А значит, данная функция достигает наименьшего значения в вершине параболы. Найдем

$$x_в = -\frac{b}{2a} = -\frac{\frac{-32}{3}}{2\cdot\frac{25}{9}} = \frac{32}{3}\cdot\frac{9}{25\cdot 2} = \frac{48}{25},$$ тогда

$$y_в = y(x_в) = y\left(\frac{48}{25}\right) = \frac{25}{9}\cdot\left(\frac{48}{25}\right)^2 - \frac{32}{3}\cdot\frac{48}{25} + 16 =$$

$$= \frac{256}{25} - \frac{512}{25} + 16 = -\frac{256}{25} + 16 = \frac{144}{25}.$$

Следовательно, наименьшее значение заданной функции $f(x) = \sqrt{\frac{25}{9}x^2 - \frac{32}{3}x + 16}$ будет равно $f_0 = \sqrt{\frac{144}{25}} = \frac{12}{5} = 2,4$.

Таким образом, наименьшее значение $|z|$ равно 2,4.

Ответ: 2,4.

III способ решения.

Так же как и во втором способе, введем в рассмотрение функцию $f(x) = \sqrt{\frac{25}{9}x^2 - \frac{32}{3}x + 16}$, которая определена на множестве всех действительных чисел. Для отыскания наименьшего значения этой функции сначала необходимо найти ее производную:

$$f'(x) = \left(\sqrt{\frac{25}{9}x^2 - \frac{32}{3}x + 16}\right)' =$$

$$= \frac{\frac{25}{9}\cdot 2x - \frac{32}{3}}{2\cdot\sqrt{\frac{25}{9}x^2 - \frac{32}{3}x + 16}} =$$

$$= \frac{\frac{50}{9}\cdot x - \frac{32}{3}}{2\cdot\sqrt{\frac{25}{9}x^2 - \frac{32}{3}x + 16}}.$$

Далее, найдем нули производной:

$$\frac{\frac{50}{9}\cdot x - \frac{32}{3}}{2\cdot\sqrt{\frac{25}{9}x^2 - \frac{32}{3}x + 16}} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{50}{9}\cdot x - \frac{32}{3} = 0, \\ \frac{25}{9}x^2 - \frac{32}{3}x + 16 \ne 0. \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{32}{3}\cdot\frac{9}{50} = \frac{48}{25}.$$

Определим знаки производной функции $f(x)$ и изобразим на числовой прямой (см. рис. 1).

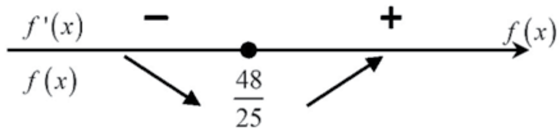

Рис. 1

Функция достигает своего наименьшего значения в точке $x_{min} = \frac{48}{25}$. Найдем наименьшее значение функции:

$$f(x_{min}) = f\left(\frac{48}{25}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{25}{9}\cdot\left(\frac{48}{25}\right)^2 - \frac{32}{3}\cdot\frac{48}{25} + 16} = \sqrt{\frac{256}{25} - \frac{512}{25} + 16} =$$

$$= \sqrt{-\frac{256}{25} + 16} = \sqrt{\frac{144}{25}} = \frac{12}{5} = 2,4.$$

Таким образом, наименьшее значение $|z|$ равно 2,4.

Ответ: 2,4.

IV способ решения.

Используем геометрические соображения. Так как множество всех комплексных чисел z, удовлетворяющих равенству $|z - 4 - 7i| = |z + 4 - i|$, изображаются на координатной плоскости прямой, заданной уравнением $y = 4 - \frac{4}{3}x$ (см. рис. 2), а по условию задачи необходимо найти наименьшее значение модуля $|z|$, которое является расстоянием от начала координат до точки, лежащей на данной прямой l, то наименьшее значение $|z|$ – кратчайшее расстояние от начала координат до данной прямой, то есть длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую l.

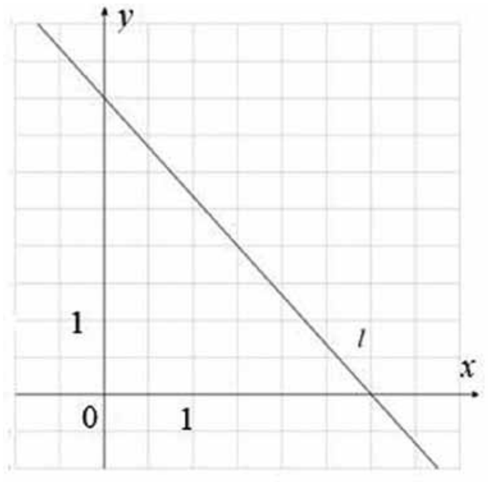

Рис. 2

Для нахождения длины перпендикуляра рассмотрим треугольник OAB (см. рис. 3).

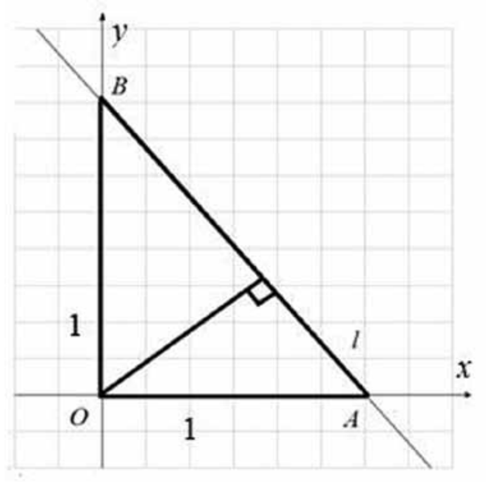

Рис. 3

Найдем точки пересечения прямой с осями координат. Если $x = 0$, то $y = 4 - \frac{4}{3} \cdot 0 = 4$, следовательно, $OB = 4$. Если $y = 0$, то $0 = 4 - \frac{4}{3}x$, , $x = 3$ следовательно, $OA = 3$. Тогда по теореме Пифагора можно найти AB, длина которого равна 5. Теперь найдем площадь треугольника OAB двумя способами, как полупроизведение катетов прямоугольного треугольника и как полупроизведение высоты и гипотенузы, далее приравняем их.

$$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot h;$$

$$5h = 12;$$

$$h = \frac{12}{5};$$

$$h = 2,4.$$

Таким образом, наименьшее значение $|z|$ равно 2,4.

Ответ: 2,4.

V способ решения.

Заметим, что левая часть данного равенства $|z - 4 - 7i| = R$ – это множество точек M (x, y), лежащих на окружности с центром в точке O_1 (4; 7) радиуса R, а правая часть $|z + 4 - i| = R$ – это множество точек M (x, y), лежащих на окружности с центром в точке O_2 (–4; 1) радиуса R. Тогда данное равенство $|z - 4 - 7i| = |z + 4 - i|$ задает множество точек, равноудаленных от O_1 и O_2. Это множество точек располагается на серединном перпендикуляре l к отрезку O_1O_2. Имеем, что $|z| = r$ – множество точек с центром в точке O (0; 0) радиуса r. Так как по условию необходимо найти наименьшее значение модуля $|z|$, то следует найти радиус окружности $|z| = r$, для которой прямая l является касательной. Из этого вытекает, что нужно найти расстояние от точки O (0; 0) до прямой l. Вот здесь можно рассуждать разными способами. Приведем два варианта дальнейшего решения.

1-й способ. Составим уравнение прямой l. Прямая l перпендикулярна O_1O_2 и проходит через середину S отрезка O_1O_2. Знаем, что координаты точек O_1 (4; 7), O_2 (–4; 1), тогда $S\left(\frac{-4+4}{2}; \frac{1+7}{2}\right) \Rightarrow S(0;\, 4)$. Составим уравнение прямой O_1O_2, заданной двумя точками O_1 и O_2.

$$O_1O_2: \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x-4}{-4-4} = \frac{y-7}{1-7} \Rightarrow \frac{x-4}{-8} = \frac{y-7}{-6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x - 8y + 32 = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{4}x + 4.$$

Составим уравнение прямой l, перпендикулярной прямой O_1O_2 и проходящей через точку S.

$$l: \; y = -\frac{4}{3}x + 4 \Rightarrow 4x + 3y - 12 = 0.$$

Найдем расстояние от точки O (0; 0) до прямой l, заданной в общем виде, для этого воспользуемся следующей формулой: $d(M_0, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, где прямая $l: Ax + By + C = 0$ и точка $M_0(x_0; y_0)$. Применяем эту формулу для нашего случая:

$$d = \frac{|4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 12|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{12}{\sqrt{25}} = \frac{12}{5} = \frac{24}{10} = 2,4.$$

Ответ: 2,4.

2-й способ. Рассмотрим треугольник $\Delta\ O_1FO_2$ ($\angle F = 90°$) (см. рис. 4). Имеем $O_1F = 6$, $O_2F = 8$. Тогда по теореме Пифагора найдем длину гипотенузы $O_1O_2 = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$. Так как $O_1O_2 \perp l$ и $OM \perp l$, то $\angle FO_2S = \angle POM$. Тогда в треугольнике $\Delta\ OMS$ угол M прямой, обозначим $\angle OSM = \alpha$, $\sin\alpha = \dfrac{OM}{SO} = \dfrac{r}{4}$. Из треугольника O_2FO_1, где угол $\angle F = 90°$, получим $\sin\alpha = \dfrac{O_1F}{O_2O_1} = \dfrac{6}{10}$. Тогда $\dfrac{r}{4} = \dfrac{6}{10}$, следовательно $r = \dfrac{24}{10} = 2,4$.

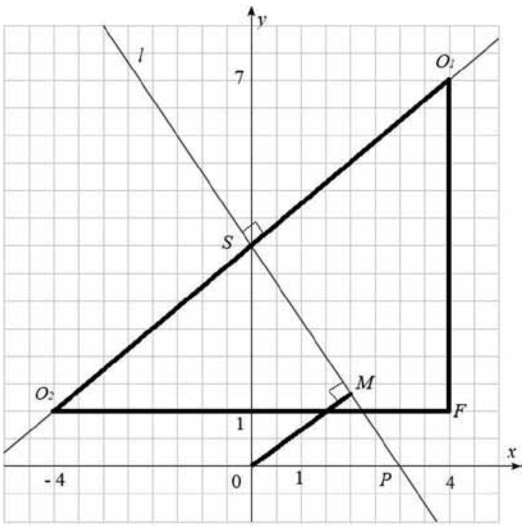

Рис. 4

Здесь можно рассуждать по-другому, подметить, что треугольники $\Delta\ OMS$ и $\Delta\ O_1FO_2$ подобны (см. рис. 4). Из отношения подобия легко находится нужное расстояние.

На примере решения рассмотренной задачи мы убеждаемся в том, что задание в демонстрационном варианте не является элементарным. Его выполнение требует от обучающегося не только базовых знаний и умений по комплексным числам, но и знаний по математическому анализу и аналитической геометрии (например, нахождения расстояния от точки до прямой, производной функции, решение неравенств и пр.).

В качестве актуализации базовых знаний при подготовке к заданию, связанному с комплексными числами, мы рекомендуем повторить:

1. Основные теоретические сведения по комплексным числам (определение комплексного числа, действия над ними).
2. Нахождение модуля комплексного числа.
3. Нахождение действительной и мнимой частей выражений.
4. Способы задания кривых на действительной и комплексной плоскостях.
5. Нахождение уравнений кривых на комплексной плоскости.
6. Способы нахождения наибольшего или наименьшего значения функций одной переменной.

Для закрепления навыков решения подобных заданий предлагаем систему задач, которые можно использовать на уроках математики или при подготовке к ЕГЭ.

1. Про комплексное число z известно, что $\operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z = 2\sqrt{2}$. Найдите наименьшее значение $|z|$.
2. Про комплексное число z известно, что $|\overline{z} - 2i| = |z - 4|$. Найдите наименьшее значение $|z|\sqrt{5}$.
3. Про комплексное число z известно, что $|z - 1| = \operatorname{Re} z$. Найдите наименьшее значение $|z|$.
4. Про комплексное число z известно, что $|z + 1 - i| = 4$. Найдите наибольшее значение $\operatorname{Im} z$.
5. Про комплексное число z известно, что $\left|\dfrac{z-1}{z+3}\right| = 1$. Найдите $\operatorname{Re} z$.
6. Про комплексное число z известно, что $|z| = \operatorname{Re} z + 1$. Найдите а) наименьшее значение $\operatorname{Re} z$; б) наименьшее значение $|z|$.
7. Про комплексное число z известно, что $\operatorname{Re}\dfrac{z-1}{z} = 0$. Найдите наименьшее значение $\operatorname{Im} z$.
8. Про комплексное число z известно, что $|z - 2| + |z + 2| = 5$. Найдите наибольшее значение $\operatorname{Re} z$.
9. Про комплексное число z известно, что $(1+i)\overline{z} = (1-i)z$. Найдите наименьшее значение $|z|$.
10. Про комплексное число z известно, что $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z} + \operatorname{Im}\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2}$. Найдите наибольшее значение $\operatorname{Im}\left(\sqrt{2} - 1\right) \cdot z$.

Опишем критерии, по которым составлялась данная подборка заданий.

Задания 1 и 2 аналогичны рассматриваемому в статье примеру, но в первом случае сразу получается уравнение прямой. Задание 3 похоже, но получается каноническое уравнение параболы ($y^2 = 2x - 1$). В четвертом задании необходимо получить уравнение кривой на комплексной плоскости – окружность, а затем по чертежу или путем оценки определить наибольшее значение мнимой части комплексного числа. В задании 5 после преобразований обучающийся сразу найдет значение действительной части комплексного числа. Задания с 6 по 10 аналогичны, но имеют более сложное уравнение в условии.

Итак, мы рассмотрели, каким образом можно решить задание № 11 перспективной модели ЕГЭ и сформулировали ряд рекомендаций для организации подготовки обучающегося к выполнению данного задания и для изучении темы «Комплексные числа» в школьном курсе математики.

Список литературы

Агеева Е.С., Матыцина Т.Н., Ширяев К.Е. Несколько слов об особенностях преподавания теории вероятностей в школе // Актуальные проблемы преподавания информационных и естественно-научных дисциплин: материалы XIV Всерос. науч.-метод. конф. Кострома: Костромской государственный университет, 2021. С. 109–112.

Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровени / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. Москва: Просвещение, 2009. 464 с.

Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений (углубленный уровень) / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номировский, В.М. Поляков. М.: Издательский центр «Вентана-Граф», 2019. 415 с.

Бабенко А.С., Кузнецова В.С., Ширяев К.Е. Школа и вуз: периодические функции и сходимость несобственных интегралов // Актуальные проблемы преподавания информационных и естественно-научных дисциплин: материалы XIV Всерос. науч.-метод. конф. Кострома: Костромской государственный университет, 2021. С. 10–13.

Бабенко А.С., Марголина Н.Л., Матыцина Т.Н., Ширяев К.Е. Математический анализ: перспективы и трудности цифрового обучения // Актуальные технологии преподавания в высшей школе: материалы науч.-метод. конф. / отв. ред. Г.Г. Сокова, Л.А. Исакова. Кострома: Костромской гос. ун-т, 2019. С. 14–16.

Бабенко А.С., Марголина Н.Л., Матыцина Т.Н., Ширяев К.Е. Некоторые рекомендации к руководству самостоятельной работой студентов по алгебре и геометрии // Актуальные технологии преподавания в высшей школе: материалы науч.-метод. конф. / отв. ред. Г.Г. Сокова, Л.А. Исакова. Кострома: Костромской гос. ун-т, 2019. С. 130–132.

Бабенко А.С., Марголина Н.Л., Матыцина Т.Н., Ширяев К.Е. Обучение учителей математики в условиях введения профессионального стандарта // Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социокинетика. 2020. Т. 26, № 4. С. 154–160.

Бабенко А.С., Марголина Н.Л., Матыцина Т.Н., Ширяев К.Е. Организация самостоятельной работы студентов при изучении дисциплины «Геометрия» // Актуальные технологии преподавания в высшей школе: материалы науч.-метод. конф. / отв. ред. Г.Г. Сокова, Л.А. Исакова. Кострома: Костромской гос. ун-т, 2019. С. 133–135.

Бабенко А.С., Марголина Н.Л., Матыцина Т.Н., Ширяев К.Е. Дифференциальные уравнения, теория вероятности, топология и математическая логика: возможность объединения в курсе высшей математики // Актуальные технологии преподавания в высшей школе: материалы науч.-метод. конф. / отв. ред. Г.Г. Сокова, Л.А. Исакова. Кострома: Костромской гос. ун-т, 2019. С. 11–13.

Виленкин Н.Я. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учебник для учащихся общеобразоват. организаций (углубленный уровень) / Н.Я. Виленкин, О.С. Ивашев-Мусатов, С.И. Шварцбурд. М.: Мнемозина, 2014. 312 с.

Колягин Ю.М. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений (профильный уровень) / Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин. М.: Мнемозина, 2010. 264 с.

Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: в 2 ч. Ч. 1: Учебник для учащихся общеобразоват. учреждений (профильный уровень) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. М.: Мнемозина, 2009. 424 с.

Муравин Г.К. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа (углубленный уровень). 11 класс: учебник / Г.К. Муравин, О.В. Муравина. М.: Дрофа, 2014. 318 с.

Перспективные модели КИМ ЕГЭ 2022. URL: https://4ege.ru/materials_podgotovka/60888-perspektivnye-modeli-kim-ege-2022.html (дата обращения: 17.01.2022).

Пратусевич М.Я. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений (профил. уровень) / М.Я. Пратусевич, К.М. Столбов, А.Н. Головин. М.: Просвещение, 2010. 463 с.

Примерная основная образовательная программа среднего общего образования. URL: https://fgosreestr.ru/ (дата обращения: 17.01.2022).

References

Ageeva E.S., Matycina T.N., Shirjaev K.E. *Neskol'ko slov ob osobennostjah prepodavanija teorii verojatnostej v shkole* [A few words about the peculiarities of teaching probability theory at school]. *Aktual'nye problemy prepodavanija informacionnyh i estestvenno-nauchnyh discipline: materialy XIV Vseros. nauch.-metod. konf.* [Actual problems of teaching information and natural science disciplines: materials of the XIV All-Russian Scientific method. conf]. Kostroma, Kostromskoj gos. un-t Publ., 2021, pp. 109–112. (In Russ.)

Algebra i nachala matematicheskogo analiza. 11 klass: ucheb. dlja obshheobrazovat. uchrezhdenij (bazovyj i profil. uroveni) [Algebra and beginning of mathematical analysis. Grade 11: textbook. for general education institutions: basic and profile. levels], S.M. Nikol'skij, M.K. Potapov, N.N. Reshetnikov, A. V. Shevkin. Moscow, Prosveshhenie Publ., 2009, 464 p. (In Russ.)

Algebra i nachala matematicheskogo analiza. 11 klass: ucheb. dlja obshheobrazovat. uchrezhdenij (uglublennyj uroven') [Algebra and beginning of mathematical analysis. Grade 11: textbook. for general education institutions: advanced level], A.G. Merzljak, D.A. Nomirovskij, V.M. Poljakov. Moscow, Ventana-Graf Publ., 2019, 415 p. (In Russ.)

Babenko A.S., Kuznecova V.S., Shirjaev K.E. *Shkola i VUZ: periodicheskie funkcii i shodimost' nesobstvennyh integralov* [School and university: periodic functions and convergence of improper integrals]. *Aktual'nye problemy prepodavanija informacionnyh i estestvenno-nauchnyh disciplin: materialy XIV Vseros. nauch.-metod. konf.* Kostroma, Kostromskoj gos. un-t Publ., 2021, pp. 10–13. (In Russ.)

Babenko A.S., Margolina N.L., Matycina T.N., Shirjaev K.E. *Matematicheskij analiz: perspektivy i trudnosti cifrovogo obuchenija* [Mathematical analysis: prospects and difficulties of digital learning]. *Aktual'nye tehnologii prepodavanija v vysshej shkole: materialy nauch.-metod. konf.* [Actual technologies of teaching in higher education: materials of scientific method. conf.], ed. by G.G. Sokova, L.A. Isakova. Kostroma, Kostromskoj gos. un-t Publ., 2019, pp. 14–16. (In Russ.)

Babenko A.S., Margolina N.L., Matycina T.N., Shirjaev K.E. *Nekotorye rekomendacii k rukovodstvu samostojatel'noj rabotoj studentov po algebre i geometrii* [Some recommendations for the guidance of independent work of students in algebra and geometry]. *Aktual'nye tehnologii prepodavanija v vysshej shkole: materialy nauchno-metodicheskoj konferencii* [Actual technologies of teaching in higher education: materials of scientific method. conf.], ed. by G.G. Sokova, L.A. Isakova. Kostroma, Kostromskoj gos. un-t Publ., 2019, pp. 130–132. (In Russ.)

Babenko A.S., Margolina N.L., Matycina T.N., Shirjaev K.E. *Obuchenie uchitelej matematiki v uslovijah vvedenija professional'nogo standarta* [Education of teachers of mathematics in the context of the introduction of a professional standard]. *Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser.: Pedagogika. Psihologija. Sociokinetika* [Vestnik of Kostroma State University. Series: Pedagogy. Psychology. Sociokinetics], 2020, vol. 26, № 4, pp. 154–160. (In Russ.)

Babenko A.S., Margolina N.L., Matycina T.N., Shirjaev K.E. *Organizacija samostojatel'noj raboty studentov pri izuchenii discipliny «Geometrija»* [Organization of independent work of students in the study of the discipline «Geometry»]. *Aktual'nye tehnologii prepodavanija v vysshej shkole: materialy nauchno-metodicheskoj konferencii* [Actual technologies of teaching in higher education: materials of scientific method. conf.], ed. by G.G. Sokova, L.A. Isakova. Kostroma, Kostromskoj gos. un-t Publ., 2019, pp. 133–135. (In Russ.)

Babenko A.S., Margolina N.L., Matycina T.N., Shirjaev K.E. *Differencial'nye uravnenija, teorija verojatnosti, topologija i matematicheskaja logika: vozmozhnost' ob#edinenija v kurse vysshej matematiki* [Differential Equations, Probability Theory, Topology and Mathematical Logic: The Possibility of Combining in Higher Mathematics Course]. *Aktual'nye tehnologii prepodavanija v vysshej shkole: materialy nauchno-metodicheskoj konferencii* [Actual technologies of teaching in higher education: materials of scientific method. conf.], ed. by G.G. Sokova, L.A. Isakova. Kostroma, Kostromskoj gos. un-t Publ., 2019, pp. 11–13. (In Russ.)

Vilenkin N.Ja. *Matematika: algebra i nachala matematicheskogo analiza, geometrija. Algebra i nachala matematicheskogo analiza. 11 klass: uchebnik dlja uchashhihsja obshheobrazovat. organizacij (uglublennyj uroven')* [Mathematics: Algebra and Principles of Mathematical Analysis, Geometry. Algebra and beginning of mathematical analysis. Grade 11: a textbook for students of educational organizations (advanced level)], N.Ja. Vilenkin, O.S. Ivashev-Musatov, S.I. Shvarcburd. Moscow, Mnemozina Publ., 2014, 312 p. (In Russ.)

Koljagin Ju.M. *Algebra i nachala matematicheskogo analiza. 11 klass: ucheb. dlja uchashhihsja obshheobrazovat. uchrezhdenij (profil'nyj uroven')* [Algebra and the beginnings of mathematical analysis. Grade 11: textbook. for general education students. institutions (profile level)], Ju.M. Koljagin, Ju.V. Sidorov, M.V. Tkacheva, N.E. Fedorova, M.I. Shabunin. Moscow, Mnemozina Publ., 2010, 264 p. (In Russ.)

Mordkovich A.G. *Algebra i nachala matematicheskogo analiza. 10 klass: v 2 ch. Ch. 1: Uchebnik dlja uchashhihsja obshheobrazovatel'nyh uchrezhdenij (profil'nyj uroven')* [Algebra and the beginnings of mathematical analysis. Grade 10: in 2 p. Part 1: Textbook for students of educational institutions (profile level)], A.G. Mordkovich, P.V. Semenov. Moscow, Mnemozina Publ., 2009, 424 p. (In Russ.)

Muravin G.K. *Matematika: algebra i nachala matematicheskogo analiza, geometrija. Algebra i nachala matematicheskogo analiza. Uglublennyj uroven'. 11 klass: uchebnik* [Mathematics: algebra and principles of mathematical analysis, geometry. Algebra and beginning of mathematical analysis (deep level). Grade 11: textbook], G.K. Muravin, O.V. Muravina. Moscow, Drofa Publ., 2014, 318 p. (In Russ.)

Perspektivnye modeli KIM EGJe 2022 [Perspective models of KIM Unified State Examination 2022]. URL: https://4ege.ru/materials_podgotovka/60888-perspektivnye-modeli-kim-ege-2022.html (access date: 17.01.2022). (In Russ.)

Pratusevich M.Ja. *Algebra i nachala matematicheskogo analiza. 11 klass: ucheb. dlja obshheobrazovat. uchrezhdenij: profil. uroven'* [Algebra and the beginnings of mathematical analysis. Grade 11: textbook for general education institutions: profile. level], M.Ja. Pratusevich, K.M. Stolbov, A.N. Golovin. Moscow, Prosveshhenie Publ., 2010, 463 p. (In Russ.)

Primernaja osnovnaja obrazovatel'naja programma srednego obshhego obrazovanija [Exemplary basic educational program of secondary general education]. URL: https://fgosreestr.ru/ (access date: 17.01.2022). (In Russ.)

Статья поступила в редакцию 01.06.2022; одобрена после рецензирования 19.06.2022; принята к публикации 19.06.2022.

The article was submitted 01.06.2022; approved after reviewing 19.06.2022; accepted for publication 19.06.2022.