DOI https://doi.org/10.34216/2073-1426-2020-26-4-187-195
УДК 378:81

Секованов Валерий Сергеевич
Костромской государственный университет
Ивков Владимир Анатольевич
Костромской государственный университет
Рыбина Лариса Борисовна
Костромская государственная сельскохозяйственная академия
Собашко Юлия Александровна
Костромской государственный университет

ВЫПОЛНЕНИЕ МАТЕМАТИКО-ИНФОРМАЦИОННОГО ЗАДАНИЯ «ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ» КАК СРЕДСТВО РАЗВИТИЯ КРЕАТИВНОСТИ СТУДЕНТОВ

Многоэтапные математико-информационные задания для студентов являются некоей творческой лабораторией, в которой они проявляют свои способности не только как математики, но и как программисты и художники. Поэтапное выполнение исследований динамики функций комплексных переменных и их визуализация способствуют развитию креативности студентов и формированию умений и навыков в области математического анализа и программирования. В данной статье рассматривается многоэтапное математико-информационное задание, которое являются специально составленной последовательностью задач, упражнений, проблем и дидактических ситуаций.

Ключевые слова: *математико-информационное задание, динамика рациональной функции, функция комплексной переменной, неподвижная точка, бассейн притяжения, заполняющее множество, креативность*

Информация об авторах: Секованов Валерий Сергеевич, доктор педагогических наук, профессор, Костромской государственный университет, профессор кафедры прикладной математики и информационных технологий, г. Кострома, Россия

E-mail: Sekovanovvs@yandex.ru

Ивков Владимир Анатольевич, кандидат экономических наук, доцент, Костромской государственный университет, доцент кафедры прикладной математики и информационных технологий, г. Кострома, Россия

E-mail: ivkov_wa@mail.ru

Рыбина Лариса Борисовна, кандидат философских наук, Костромская государственная сельскохозяйственная академия, доцент кафедры высшей математики, п. Караваево, Костромская область, Россия

E-mail: larisa.rybina.2014@mail.ru

Собашко Юлия Александровна, кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики, Костромской государственный университет, г. Кострома, Россия

E-mail: kgtu-sobashko-ya@mail.ru

Дата поступления статьи: 04.10.2020

Для цитирования: Секованов В.С., Ивков В.А., Рыбина Л.Б., Собашко Ю.А. Выполнение математико-информационного задания «Исследование динамики рациональных функций комплексной переменной» как средство развития креативности студентов // Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социокинетика. 2020. Т. 26, № 4. С. 187-195. DOI https://doi.org/10.34216/2073-1426-2020-26-4-187-195

Valeriy S. Sekovanov
Kostroma State University
Vladimir A. Ivkov
Kostroma State University
Larisa B. Rybina
Kostroma State agricultural Academy
Yuliya A. Sobashko
Kostroma State University

PERFORMING A MATHEMATICAL AND INFORMATIONAL TASK “RESEARCH OF THE DYNAMICS OF RATIONAL FUNCTIONS OF A COMPLEX VARIABLE” AS A MEANS OF DEVELOPING STUDENTS’ CREATIVITY

Multi-stage math and information tasks for students are a kind of creative laboratory in which they show their abilities not only as mathematicians, but also as programmers and artists. Stepwise research on the dynamics of functions of complex variables and their visualisation contribute to the development of students’ creativity and the formation of skills in the field of mathematical analysis and programming. This article deals with a multi-stage mathematical and informational task, which is a specially composed sequence of tasks, exercises, problems and didactic situations.

Keywords: *mathematical information task, dynamics of rational function, function of complex variable, fixed point, pool of attraction, filling set, creativity*

Information about the authors: Valeriy S. Sekovanov, Doctor of Pedagogical Sciences, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Kostroma State University, Kostroma, Russia

E-mail: Sekovanovvs@yandex.ru

Vladimir A. Ivkov, Candidate of Economic Sciences, Associate Professor, Kostroma State University, Kostroma, Russia

E-mail: ivkov_wa@mail.ru

Larisa B. Rybina, Candidate of Philosophical Sciences, Kostroma State Agricultural Academy, Karavayevo, Kostroma district, Kostroma Region, Russia

E-mail: larisa.rybina.2014@mail.ru

Yuliya A. Sobashko, Candidate of Technical Sciences, Kostroma State University, Kostroma, Russia

E-mail: kgtu-sobashko-ya@mail.ru

Article received: October 4, 2020

For citation: Sekovanov V.S., Ivkov V.A., Rybina L.B., Sobashko Yu.A. Performing a mathematical and informational task “Research of the dynamics of rational functions of a complex variable” as a means of developing students’ creativity. Vestnik of Kostroma State University. Series: Pedagogy. Psychology. Sociokinetics, 2020, vol. 26, № 4, pp. 187-195 (In Russ.). DOI https://doi.org/10.34216/2073-1426-2020-26-4-187-195

Креативность как способность к творчеству является одной из важнейших составляющих творческой личности, способной решать широкий спектр задач, которые ставит информационное общество. Это важное качество обеспечивает приспособление индивида к быстро меняющимся условиям жизни, является залогом успеха личности в профессиональной деятельности [Чебунькина: 217; Секованов, 2016б: 189; Катержина: 24].

Большую роль в развитии этого важного качества играет выполнение обучающимися многоэтапных математико-информационные заданий (ММИЗ) [Секованов, 2016а: 213; Секованов, 2013б: 155; Секованов, 2017: 140].

Мы рассмотрим многоэтапное математико-информационное задание (ММИЗ), которое являются специально составленной последовательностью задач, упражнений, проблем и дидактических ситуаций, которые соединяют друг с другом:

а) различные виды творческой математической деятельности;

б) создание художественных композиций с помощью фракталов;

в) проведение компьютерных экспериментов;

г) проведение лабораторных работ по математике;

д) поиск информации в Интернете;

е) креативные качества студентов.

Многоэтапное математико-информационное задание является лабораторией формирования креативности для обучаемых. При их выполнении у студента развивается интеллект, конвергентное и дивергентное мышление, вырабатывается умение прогнозировать результаты математической деятельности, развиваются рефлексивные способности, толерантность к неизвестности, неопределенности и новизне, мотивация к предмету, формируются эстетические и нравственные качества.

ММИЗ является для студентов творческой лабораторией, поскольку при его выполнении они выступают в роли математиков, программистов, компьютерных художников и пользователей локальных и глобальных сетей.

В данной статье предлагается многоэтапное математико-информационное задание, связанное с решением задач голоморфной динамики, находящей в настоящее время многочисленные приложения (рис. 1).

Развитию креативности, многоэтапным математико-информационным заданиями голоморфной динамике посвящены многочисленные работы, в т.ч. [Секованов 2012а: 153; Секованов 2012а: 23; Секованов 2012б; Секованов 2007].

На наш взгляд, положительную роль при развитии креативности студентов окажет выполнение многоэтапного математико-информационного задания «Исследование динамики семейства рациональных функций», состоящего из четырех этапов. При выполнении каждого этапа у студента формируются креативные качества и повышается мотивация к изучению математики и программирования [Секованов 2018: 144; Секованов 2016в: 143; Секованов 2013в].

Следует отметить, что большинство предлагаемых задач в данном ММИЗ нестандартны, решения их требует от студента проявления толерантности к новизне, оригинальности мышления – важнейших креативных качеств. Исследование бассейнов притяжения неподвижных точек, как аналитическими методами, так и с помощью компьютерных экспериментов, развивает гибкость мышления студента – важного креативного качества. И, наконец, выдвижение гипотез и их проверка нацелены на развитие креативного качества – интуитивного мышления. Следует отметить, что множества Жюлиа являются одними из самых красивых математических объектов. При выполнении данного ММИЗ студент является одновременно математиком, программистом и компьютерным художником, что позитивно влияет на развитие его креативности.

Этап 1. Процесс итерирования функций применяется достаточно часто. Студенты знакомятся с данным методом при решении нелинейных уравнений, изучении оператора сжатия, при доказательстве теоремы о существовании и единственности решения дифференциального уравнения и изучении других вопросов. Однако на данном этапе они встречаются с новыми типами задач, связанных с понятием итерация.

Пусть мы имеем $f(z)$ – некоторую функцию. Положим $f^{(n)}(z)=f\,(f^{(n-1)}(z)),\ n=1,2,\ldots,$ где $f^{(n)}(z)$ означает взятие n-й итерации функции $f(z)$. Например если $f(z)=z^2$, то $f^{(n)}(z)=z^{2^n}$. Для развития гибкости мышления студенту целесообразно провести вычисления, используя как математические методы, так и компьютерные эксперименты.

Пусть $f(z)$ – полином комплексной переменной. Множество Жюлиа для $f(z)$, обозначаемое $J(f)$, определяется как $J(f)=\partial\{z:f^{(n)}(z)\to\infty, n\to\infty\}$, где ∂ – граница области притяжения бесконечности. Таким образом множество Жюлиа является границей бассейна притяжения неподвижной притягивающей точки z = ∞.

Под заполняющим множеством Жюлиа мы будем понимать те множества, орбита точек которых поймана.

На примере рассмотренной выше функции $f(z)=z^2$ студенту полезно построить заполняющее множество Жюлиа и множество Жюлиа двумя способами:

1) используя аналитические методы;
2) используя компьютерную программу.

Данный подход нацелен на развитие гибкости мышления студента и усиление его мотивации к информационным и коммуникационным технологиям (ИКТ).

Рассмотрим заполняющие множества Жюлиа на примере полиномов второй степени. Студенты с помощью выдвижения гипотез и их проверки должны показать, что точки, не принадлежащие заполненному множеству Жюлиа, будут являться элементами бассейна притяжения неподвижной точки z = ∞. Начать следует с рассмотренной выше функции $f(z) = z^2$. Здесь студенты рассматривают различные точки и исследуют их орбиты, выдвинув гипотезу: если модуль точки z больше единицы, то ее орбита будет стремиться к ∞. Если же

Рис. 1. Схема многоэтапного математико-информационного задания

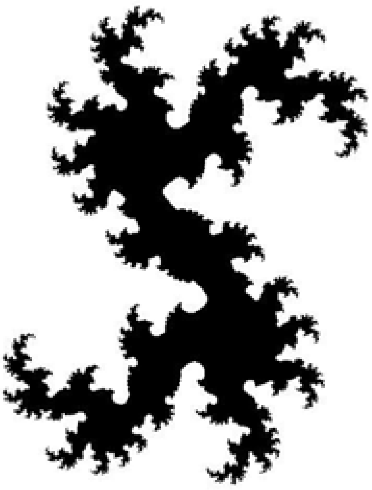

Рис. 2. Заполняющее множество Жюлиа для функции $f(z) = z^2 + 0,4 + 0,2i$

Рис. 3. Заполняющее множество Жюлиа для функции $f(z) = z^2 - 0,24251 + 0,8271i$

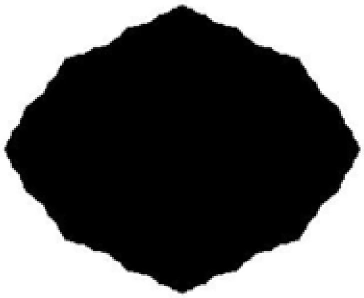

Рис. 4. Заполняющее множество Жюлиа для функции $f(z) = z^2 - 0,25$

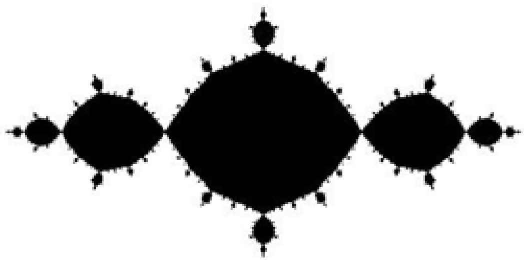

Рис. 5. Заполняющие множества Жюлиа для функции $f(z) = z^2 - 1$

модуль точки z меньше единицы, то орбита такой точки будет стремиться к нулю.

Далее студентам предлагается построить множества Жюлиа для различных квадратичных функций. Выдвигая гипотезы и проводя их проверку, студенты уточнят бассейны притяжения неподвижных точек и, используя компьютерную программу, строят множества Жюлиа (рис. 2–5), что указывает им на важность интеграции математики и программирования и вырабатывается креативное качество – толерантность к новизне.

Приведем примеры множеств Жюлиа (рис. 2–5).

Студентам полезно пояснить действие алгоритма построения заполняющего множества Жюлиа:

1) находим его *n*-ю итерацию $f^{(n)}(z)$ (обычно достаточно взять *n=20*) на комплексной плоскости (ее имитирует монитор компьютера).

2) точка z отмечается черным цветом, если ее орбита $z \to z_1 \to z_2 \to \ldots \to z_n \to \ldots$ ограничена (для ограниченности орбиты достаточно, чтобы было $|z_n| \le 4$).

3) в противном случае данная точка пропускается и исследуется следующая точка комплексной плоскости. Процесс закончится тогда, когда будет исследована орбита каждой точки видимой части экрана компьютера.

Далее следует предложить студентам задачи:

a) выявить заполняющие множества Жюлиа для функций $f(z) = z^3$ и $h(z) = z^4$;

b) построить множества Жюлиа для данных функций;

c) провести анализ действий, выполненных в пунктах а) – б).

Этап 2. Для студентов понятие «бассейн притяжения» является новым. Здесь полезно выяснить сначала как ведут себя орбиты точек простейшей функции $f(z) = z^2$. После проведенных действий следует дать определение:

бассейном притяжения точки x_0 для отображения f называется множество

$A_f(x_0) = \{x \in C, f^n(x) \to x_0, n \to \infty\}$

Бассейн притяжения цикла – есть объединение бассейнов притяжения всех точек этого цикла.

В качестве примера рассмотрим алгоритм построения бассейнов притяжения неподвижных точек применительно к рациональной функции $f(z) = \dfrac{z^3}{1 - z^2}$. Студенты должны проводить действия по следующей схеме:

1) находят неподвижные точки данной функции при решении уравнения $f(z) = z$. После несложных вычислений получаются три неподвижные точки:

$z_1 = 0,\ z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}},\ z_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$;

2) определяют характер неподвижных точек и находят производную данной функции $f'(z) = \frac{3z^2 - 4z^4}{1 - z^2}$, вычисляют ее значения в точках $f'(z_1) = 0, f'(z_2) = 6, f'(z_3) = 6$, и делают вывод, что точка z_1 – притягивающая, а точки z_2 и z_3 – отталкивающие;

3) разрабатывают алгоритм построения бассейна притяжения неподвижной притягивающей точки $z_1 = 0$; описывают основной модуль алгоритма, определяют функцию:

```
function fx(z: complex): complex;
begin
fx := z*z*z/(1-z*z);
end.
```

Далее рассматривают точку комплексной плоскости c и вычисляют наперед заданное число итераций iter функции $f(z) = \frac{z^3}{1 - z^2}$ в точке c.

```
for i:=1 to width do
for j:=1 to height do begin
c := (x_min +i * dx ,y_min + j * dy);
try
for k:=1 to iter do c := fx(c);
kef := power(c.real, 2) + power(c.imaginary, 2);
if(abs(kef)<1) then
setpixel(i,j, clblack );
except
end;
end;
```

Если квадрат модуля вычисленной итерации $f^{(iter)}(z)$ меньше единицы, то данную точку закрашивают в черный цвет (она принадлежит бассейну притяжения). В противном случае данная точка пропускается и рассматривается другая точка комплексной плоскости;

4) строят бассейн притяжения точки $z_1 = 0$, состоящий из точек черного цвета (рис. 6).

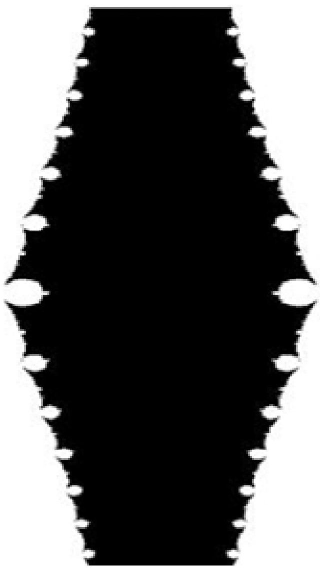

Рис. 6. Бассейн притяжения точки z_1 функции $f(z) = \frac{z^3}{1 - z^2}$

Следует отметить, что при выполнении данного этапа студент мыслит как логически, так и образно, исследует объект аналитическими методами с использованием ИКТ.

Для развития важнейшего креативного качества – гибкости мышления – студентам полезно построить бассейн притяжения точки z_1 функции $f(z) = \frac{z^3}{1 - z^2}$, используя математический пакет.

Этап 3. Для развития интуитивного мышления студенту ставится вопрос: будет ли точка из бассейна притяжения периодической? Сначала студент будет выдвигать различные гипотезы, осуществлять их проверку. После проведенных исследований он доказывает, что каждая точка, принадлежащая бассейну притяжения, не является периодической.

Доказательство. Предположим противное. То есть то, что существует точка $z \neq z_0$ периода $n \in N$. Тогда будем иметь: $f^{(n)}(z) = z$. Пусть $k \in N$. Нетрудно заметить, что будет выполняться равенство (1):

$$f^{(kn)}(z) = z \quad (1)$$

Поскольку $\lim_{n \to \infty} f^{(n)}(z) = z_0$, то равенство (1) невозможно.

Согласно лемме, ни одна конечная точка бассейна притяжения комплексной плоскости не является периодической. Здесь студентам следует предложить обосновать данное утверждение.

Рассмотрим теперь функцию $f_1(z) = \frac{z}{1 - 2z}$. Найдя неподвижные точки функции $f_1(z)$, решая уравнение $\frac{z}{1 - 2z} = z$, студенты убеждаются, что точка $z = 0$ является единственной неподвижной точкой данной функции. Далее они показывают, что данная неподвижная точка – нейтральная. Действительно, $\left(f_1(z)\right)' = \frac{1}{(1 - 2z)^2}$ и $f_1(0) = 1$.

Затем студенты находят итерации функции $f_1(z)$:

$$f_1^{(2)}(z) = \frac{\frac{z}{1 - 2z}}{1 - 2\frac{z}{1 - 2z}} = \frac{z}{1 - 4z},$$

$$f_1^{(3)}(z) = \frac{\frac{z}{1 - 4z}}{1 - 2\frac{z}{1 - 4z}} = \frac{z}{1 - 6z}, \ldots$$

Взяв несколько точек комплексной плоскости, они убеждаются, что их орбита стремится к нулю и, развивая интуитивное мышление, вновь выдвигают гипотезу: для каждой конечной точки комплексной плоскости ее орбита стремится к нулю. Следующим шагом является проверка истинности данной гипотезы. Используя метод математической индукции, студенты получат: $f_1^{(n)}(z)=\dfrac{z}{1-2nz}$, а, следовательно, $\lim_{n\to\infty} f_1^{(n)}(z)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{z}{1-2nz}=0$.

Здесь полезно со студентами провести компьютерный эксперимент с помощью несложной программы, подтверждающей равенство нулю предела n-й итерации функцию $f_1(z)=\dfrac{z}{1-2z}$ при любом выборе числа z.

```
uses crt, GraphABC;
var i, n: integer; var z, y: complex;
begin
readln(n); z:=(2,1); clrScr;
for i:=1 to n do
begin
y:=(z)/(1-2*z);z:=y;
writeln(y)
end;
end.
```

Таким образом, бассейном притяжения неподвижной точки $z = 0$ является вся комплексная плоскость (черный цвет рис. 7), а границей бассейна притяжения согласно Минлор [Минлор] будет множество Жюлиа, совпадающее с пустым множеством.

Рассмотрим теперь функцию $f_2(z)=\dfrac{z^2}{1-2z^2}$. Положим $\omega=\phi(z)=\dfrac{1}{z}$ и $g(\omega)=\omega^2-2$. Покажем, что $g=\phi\circ f_2\circ\phi^{-1}$. Действительно, $z=\phi^{-1}(\omega)=\dfrac{1}{\omega}$ имеем $f_2\circ\varphi^{-1}(\omega)=\dfrac{\left(\dfrac{1}{\omega}\right)^2}{1-2\left(\dfrac{1}{\omega}\right)^2}=\dfrac{1}{\omega^2-2}$. Далее имеем $\varphi\circ f_2\circ\varphi^{-1}=g(\omega)$, что и требовалось доказать. То есть мы имеем $g(\omega)=\dfrac{1}{f_2\left(\dfrac{1}{\omega}\right)}=y$. Найдем вторую итерацию функции $g(\omega)$. Имеем:

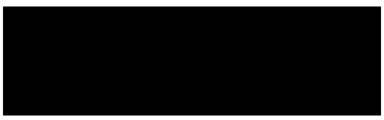

Рис. 7. Бассейн притяжения неподвижной точки $z = 0$ функции $f_1(z)=\dfrac{z}{1-2z}$

$$g^{(2)}(\omega)=\frac{1}{f_2\left(\dfrac{1}{\dfrac{1}{f_2\left(\dfrac{1}{\omega}\right)}}\right)}=\frac{1}{f_2\left(f_2\left(\dfrac{1}{\omega}\right)\right)}=\frac{1}{f_2^{(2)}\left(\dfrac{1}{\omega}\right)}.$$

Используя метод математической индукции, получим (2)

$$g^{(n)}(\omega)=\frac{1}{f_2^{(n)}\left(\dfrac{1}{\omega}\right)} \qquad (2)$$

Следуя [1] и используя (2), приведем схему доказательства, что для каждой точки $\omega\in\mathbb{C}\setminus[-2;2]$, $g^{(n)}(\omega)\to\infty$.

Замечание. Здесь студентам предлагается провести пошаговое исследование. При выполнении первого шага им требуется проявить гибкость мышления, проводя сначала компьютерные эксперименты, а потом, проявляя оригинальность мышления, установить неожиданную связь между множествам $\mathbb{S}$ – окружностью единичного радиуса с центром в начале координат и $[-2;2]$ – отрезком числовой прямой, при отображении $h(\omega)=\omega+\dfrac{1}{\omega}$. На втором шаге студентам придется выдвигать гипотезы: внутренность $\mathbb{S}$ отобразится на отрезок $[-2;2]$ или его внешность $\mathbb{C}\setminus[-2;2]$. На третьем шаге студентам полезно сначала показывать с помощью компьютерной программы, что предел $g^{(m)}(\omega)$, $\omega\in\mathbb{C}\setminus[-2;2]$ может принимать при различных ω сколь угодно большие значения, а потом аналитически доказать выдвинутую гипотезу, что позитивно повлияет на мотивацию студента как к математике, так и к информационным и коммуникационным технологиям. И, наконец, вновь проводя компьютерные эксперименты и применяя аналитические методы, студент устанавливает включение $g([-2;2])\subseteq[-2;2]$. Здесь полезно студентам предложить задачу: выполняется ли равенство $g([-2;2])=[-2;2]$.

1) Замечаем сначала, что $z=h(w)=w+\dfrac{1}{w}$ отображает единичную окружность S радиуса *1* с центром в начале координат ($|w|=1$) на отрезок $[-2;\,2]$.

2) Замечаем, что, если $|w|>1$, то $w+\dfrac{1}{w}\in C\setminus[-2;\,2]$. То есть внешность круга, ограниченного окружностью $\mathbb{S}$ единичного радиуса с центром в начале координат отображается на внешность отрезка $[-2;\,2]$.

3) Проверяется, что $g^{(m)}(\omega)=\omega^{2^m}+\dfrac{1}{\omega^{2^m}}$ и $\lim\limits_{m\to\infty}\left(g^{(m)}\left(h(\omega)\right)\right)=\lim\limits_{m\to\infty}\left(\omega^{2^m}+\dfrac{1}{\omega^{2^m}}\right)=\infty$.

4) Устанавливается, что $g\left([-2;2]\right)\subseteq[-2;2]$

В силу 1) – 4) делается заключение – множеством Жюлиа для рациональной функции является отрезок $[-2;\,2]$.

Заметим, что множество Жюлиа для $g(\omega)=\omega^2-2$ не является фракталом и заполняющим множеством Жюлиа полинома $g(\omega)=\omega^2-2$ также будет отрезок $[-2;\,2]$.

Пусть теперь z_0 – некоторое комплексное число, принадлежащее множеству $\mathbb{C}\setminus[-2;2]$. Существует такое комплексное число ω_0, что $\dfrac{1}{\omega_0}=z_0$ и $\dfrac{1}{\omega_0}$ $\mathbb{C}\setminus[-2;2]$. Согласно равенству (2) будем иметь $\dfrac{1}{f_2^{(n)}\left(\dfrac{1}{\omega_0}\right)}\to\infty.$ Следовательно, $f_2^{(n)}\left(\dfrac{1}{\omega_0}\right)\to 0.$ То есть $f_2^{(n)}(z_0)\to 0$. Резюмируя наше исследование, заключаем, что бассейном притяжения неподвижной точки $z=0$ является множество $\mathbb{C}\setminus[-2;2]$, а границей бассейна притяжения, согласно Минлор, [Минлор] будет множество Жюлиа, совпадающее с множеством $\mathbb{R}\setminus[-2;2]$ (рис. 8).

Этап 4. Здесь следует указать студентам, что выявление бассейнов притяжения неподвижных точек аналитическими методами часто бывает затруднительным. Однако эффективным средством построения данных множеств являются компьютерные программы. Студенты должны разработать алгоритм построения бассейнов притяжения неподвижной точки $z=0$ семейства рациональных функций $f_n(z)=\dfrac{z^n}{1-z^2}$. Здесь им необходимо воспользоваться алгоритмом, описанным при выполнении второго этапа (см. рис. 6).

При $n=2$ получим бассейн притяжения неподвижной точки $z=0$ (рис. 9, черный цвет).

Рис. 8. Бассейн притяжения функции

$$f_2(z)=\frac{z^2}{1-2z^2}$$

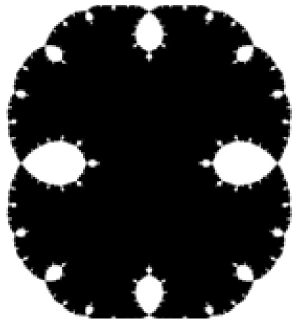

Рис. 9. Бассейн притяжения функции

$$f_2(z)=\frac{z^2}{1-z^2}$$

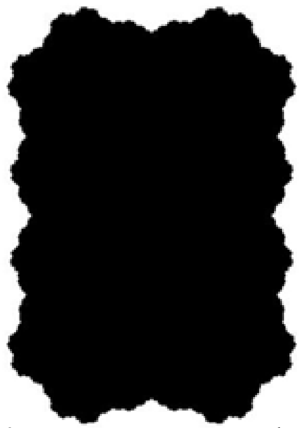

Рис. 10. Бассейн притяжения функции

$$f_4(z)=\frac{z^4}{1-z^2}$$

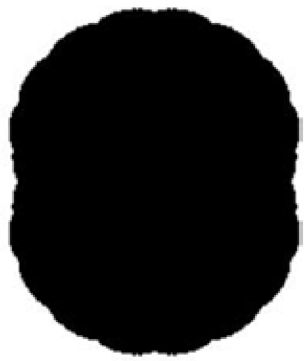

Рис. 11. Бассейн притяжения функции

$$f_{11}(z)=\frac{z^{11}}{1-z^2}$$

При $n=4$ получим бассейны притяжения неподвижной точки $z=0$ (рис. 10, черный цвет).

При $n=11$ получим бассейн притяжения неподвижной точки $z=0$ (рис. 11, черный цвет).

При исследовании бассейнов притяжения неподвижной точки $z=0$ данного семейства функций студенты развивают важное креативное качество – интуитивное мышление, выдвинув гипотезу – при увеличении числа *n* бассейн притяжения неподвижной точки $z = 0$ функции $f_n(z) = \frac{z^n}{1 - z^2}$, будет приближаться к кругу.

Полезно предложить следующую задачу: выявить хотя бы один бассейн притяжения точки $z = 0$ (рис. 3, 8– 10) аналитическими методами.

Для повышения мотивации к занятиям по компьютерной графике и программированию студентам полезно задать домашнее задание: создать художественные композиции, используя рисунки 2–11 и компьютерные технологии.

Таким образом, при выполнении многоэтапного математико-информационного задания «Исследование динамики семейства рациональных функций» студенты развивают гибкость, оригинальность мышления, интуитивное мышление, толерантность к новизне и эстетические качества. Кроме того, они оказываются в роли математика, программиста, компьютерного художника, что позитивно влияет на развитие их креативности.

В заключении отметим, что мы начинаем практиковать написание ВКР студентом как разработку и выполнение ММИЗ, что, на наш взгляд, поможет ему глубже установить глубинные связи между отдельными темами диплома и способствовать развитию гибкости и критичности мышления – важнейших креативных качеств.

Список литературы

Катержина С.Ф., Собашко Ю.А. Задачно-модульное обучение при изучении дисциплины «Математический анализ» в вузе. Актуальные технологии преподавания в высшей школе: материалы научно-методической конференции / отв. ред. Г.Г. Сокова, Л.А. Исакова. Кострома: КГУ, 2019. С. 24–26.

Минлор Дж. Голоморфная динамика. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. 320 с.

Пайген Х.-О, Рихтер П.Х. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем / Пер. с англ. М.: Мир, 1993. 176 с.

Секованов В.С., Бабенко А.С., Селезнева Е.М., Смирнова А.О. Выполнение многоэтапного математико-информационного задания «Дискретные динамические системы», как средство формирования креативности студентов // Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социокинетика. 2016а. № 2. С. 213–217. (а)

Секованов В.С. Концепция обучения фрактальной геометрии в КГУ им. Н.А. Некрасова // Вестник Костромского государственного университета им. Н.А. Некрасова. 2013а. № 5. С. 153–154. (а)

Секованов В.С. О множествах Жюлиа рациональных функций // Вестник Костромского государственного университета им. Н.А. Некрасова. 2012. № 2. С. 23–28. (а)

Секованов В.С. Обучение фрактальной геометрии как средство формирования креативности студентов физико-математических специальностей университетов: дис. … докт. пед. наук. Кострома, 2007. 393 с.

Секованов В.С. Элементы теории фрактальных множеств. Кострома: КГУ им. Н. А. Некрасова, 2012. 208 с. (б)

Секованов В.С., Ивков В.А. Многоэтапное математико-информационное задание «Странные аттракторы» // Вестник Костромского государственного университета им. Н.А. Некрасова. Кострома: КГУ, 2013. № 5. С. 155–157. (б)

Секованов В.С., Миронкин Д.П. Изучение преобразования пекаря как средство формирования креативности студентов и школьников с использованием дистанционного обучения // Вестник Костромского государственного университета им. Н.А. Некрасова. 2013. №1. С. 190 –195. (в)

Секованов В.С., Митенева С.Ф., Рыбина Л.Б. Выполнение многоэтапного математико-информационного задания «Топологическая и фрактальные размерности множеств» как средство развития креативности и формирования компетенций студентов // Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социокинетика. 2017. № 2. С. 140–144.

Секованов В.С., Рыбина Л.Б., Березкина А.Е. О множествах Жюлиа функций, имеющих параболическую неподвижную точку // Актуальные проблемы преподавания информационных и естественно-научных дисциплин. Кострома: КГУ, 2018. С. 144–150.

Секованов В.С., Смирнова А.О. Развитие гибкости мышления студентов при изучении структуры неподвижных точек полиномов комплексной переменной // Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социокинетика. 2016. № 3. С. 189–192. (б)

Секованов В.С., Фатеев А.С., Белоусова Н.В. Развитие гибкости мышления студентов при разработке алгоритмов построения дерева Фейгенбаума в различных средах // Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социокинетика. 2016. № 1. С. 143–147. (в)

Чебунькина Т.А., Катержина С.Ф., Собашко Ю.А. Необходимость входного контроля по математике в вузе // Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социокинетика. 2019. № 3. С. 217–221.

Reference

Katerzhina S.F., Sobashko Iu.A. *Zadachno-modul'noe obuchenie pri izuchenii distsipliny "Matematicheskii analiz" v vuze. Aktual'nye tekhnologii prepodavaniia v vysshei shkole: materialy nauchno-*

metodicheskoi konferentsii / otv. red. G.G. Sokova, L.A. Isakova [Task-modular training in the study of the discipline “Mathematical analysis” at the university. Actual technologies of teaching in higher education: materials of the scientific and methodological conference, ed. by G.G. Sokova, L.A. Isakova]. Kostroma: KGU, 2019, pp. 24–26. (In Russ.)

Minlor Dzh. *Golomorfnaia dinamika* [Holomorphic dynamics]. Izhevsk, NITs Reguliarnaia i khaoticheskaia dinamika Publ., 2000, 320 p. (In Russ.)

Paigen Kh.-O, Rikhter P.Kh. *Krasota fraktalov. Obrazy kompleksnykh dinamicheskikh system*, *per. s angl* [The beauty of fractals. Images of complex dynamic systems, Trans. from English]. Mosocw, Mir Publ., 1993. 176 p. (In Russ.)

Sekovanov V.S., Babenko A.S., Selezneva E.M., Smirnova A.O. *Vypolnenie mnogoetapnogo matematiko-informatsionnogo zadaniia “Diskretnye dinamicheskie sistemy”, kak sredstvo formirovaniia kreativnosti studentov* [Fulfillment of a multi-stage mathematical and informational task “Discrete dynamic systems” as a means of forming students' creativity]. *Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriia: Pedagogika. Psikhologiia. Sotsiokinetika* [Vestnik of Kostroma State University. Series: Pedagogy. Psychology. Sociokinetics]. 2016a, № 2, pp. 213–217. (In Russ.)

Sekovanov V.S. *Kontseptsiia obucheniia fraktal'noi geometrii v KGU im. N.A. Nekrasova* [The concept of teaching fractal geometry at the Nekrasov Kostroma State University]. *Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo universiteta im. N.A. Nekrasova* [Vestnik of Nekrasov Kostroma State University]. 2013a, № 5, pp. 153–154. (In Russ.)

Sekovanov V.S. O *mnozhestvakh Zhiulia ratsional'nykh funktsii* [Julia sets of rational functions]. *Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo universiteta im. N.A. Nekrasova.* [Vestnik of Nekrasov Kostroma State University], 2012, № 2, pp. 23–28. (In Russ.)

Sekovanov V.S. *Obuchenie fraktal'noi geometrii kak sredstvo formirovaniia kreativnosti studentov fiziko-matematicheskikh spetsial'nostei universitetov*: dis. … dokt. ped. nauk [Teaching fractal geometry as a means of forming the creativity of students of physical and mathematical specialties of universities: DSc thesis]. dis. … dokt. ped. nauk. Kostroma, 2007, 393 p. (In Russ.)

Sekovanov V.S. *Elementy teorii fraktal'nykh mnozhestv* [Elements of the theory of fractal sets]. Kostroma, KGU im. N. A. Nekrasova Publ., 2012, 208 p. (In Russ.)

Sekovanov V. S., Ivkov V. A. *Mnogoetapnoe matematiko-informatsionnoe zadanie “Strannye attraktory”* [Multi-stage mathematics and informational task "Strange attractors"]. *Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo universiteta im. N.A. Nekrasova* [Vestnik of Nekrasov Kostroma State University], 2013, № 5, pp. 155–157. (In Russ.)

Sekovanov V. S., Mironkin D. P. *Izuchenie preobrazovaniia pekaria kak sredstvo formirovaniia kreativnosti studentov i shkol'nikov s ispol'zovaniem distantsionnogo obucheniia* [Studying the transformation of the baker as a means of shaping the creativity of students and schoolchildren using distance learning]. *Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo universiteta im. N.A. Nekrasova* [Vestnik of Nekrasov Kostroma State University], 2013, № 1. pp. 190 –195. (In Russ.)

Sekovanov V.S., Miteneva S.F., Rybina L.B. *Vypolnenie mnogoetapnogo matematiko-informatsionnogo zadaniia “Topologicheskaia i fraktal'nye razmernosti mnozhestv” kak sredstvo razvitiia kreativnosti i formirovaniia kompetentsii studentov* [Fulfillment of a multi-stage mathematical and informational task “Topological and fractal dimensions of sets” as a means of developing creativity and forming students' competencies]. *Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriia: Pedagogika. Psikhologiia. Sotsiokinetika* [Vestnik of Kostroma State University. Series: Pedagogy. Psychology. Sociokinetics]. 2017, № 2, pp. 140–144. (In Russ.)

Sekovanov V.S., Rybina L.B., Berezkina A.E. *O mnozhestvakh Zhiulia funktsii, imeiushchikh parabolicheskuiu nepodvizhnuiu tochku* [On Julia's sets of functions having a parabolic fixed point]. *Aktual'nye problemy prepodavaniia informatsionnykh i estestvenno-nauchnykh distsiplin* [Actual problems of teaching information and natural sciences]. Kostroma, KGU Publ., 2018, pp. 144–150. (In Russ.)

Sekovanov V.S., Smirnova A.O. *Razvitie gibkosti myshleniia studentov pri izuchenii struktury nepodvizhnykh tochek polinomov kompleksnoi peremennoi* [Development of students' flexibility of thinking when studying the structure of fixed points of complex variable polynomials]. *Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriia: Pedagogika. Psikhologiia. Sotsiokinetika* [Vestnik of Kostroma State University. Series: Pedagogy. Psychology. Sociokinetics]. 2016, № 3, pp. 189–192. (In Russ.)

Sekovanov V.S., Fateev A.S., Belousova N.V. *Razvitie gibkosti myshleniia studentov pri razrabotke algoritmov postroeniia dereva Feigenbauma v razlichnykh sredakh* [Development of students' flexibility of thinking when developing algorithms for constructing a Feigenbaum tree in various environments]. *Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriia: Pedagogika. Psikhologiia. Sotsiokinetika* [Vestnik of Kostroma State University. Series: Pedagogy. Psychology. Sociokinetics]. 2016, № 1, pp. 143–147. (In Russ.)

Chebun'kina T.A., Katerzhina S.F., Sobashko Iu.A. *Neobkhodimost' vkhodnogo kontrolia po matematike v vuze* [The need for entrance control in mathematics at the university]. *Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriia: Pedagogika. Psikhologiia. Sotsiokinetika* [Vestnik of Kostroma State University. Series: Pedagogy. Psychology. Sociokinetics]. 2019, № 3, pp. 217–221. (In Russ.)