ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социокинетика. 2025. Т. 31, № 1. С. 123–131. ISSN 2073-1426
Vestnik of Kostroma State University. Series: Pedagogy. Psychology. Sociokinetics, 2025, vol. 31, no. 1, pp. 123–131. ISSN 2073-1426
Научная статья
УДК 51
EDN PQJDAA
https://doi.org/10.34216/2073-1426-2025-31-1-123-131

ВЫПОЛНЕНИЕ МНОГОЭТАПНОГО МАТЕМАТИКО-ИНФОРМАЦИОННОГО ЗАДАНИЯ «ЦИКЛЫ, МНОЖЕСТВА ЖЮЛИА И ЛЕПЕСТКИ ЛО-ФАТУ» КАК СРЕДСТВО РАЗВИТИЯ КРЕАТИВНОСТИ СТУДЕНТОВ

Секованов Валерий Сергеевич, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор, Костромской государственный университет, Кострома, Россия, sekovanovvs@yandex.ru, https://orcid. org/0000-0002-8604-8931

Рыбина Лариса Борисовна, кандидат философских наук, доцент, Костромская государственная сельскохозяйственная академия, Кострома, Россия, larisa.rybina.2014@mail.ru, https://orcid.org/0000-0001-7891-9373

Щепин Роман Александрович, Костромской государственный университет, Кострома, Россия, kurlikchelovek@gmail.com, https://orcid.org/0009-0000-1175-7488

Аннотация. В данной статье в рамках многоэтапного математико-информационного задания рассмотрены циклы, множества Жюлиа и лепестки Ло-Фату. Изучение данных множеств связано как с использованием математических методов, так и с применением информационных и коммуникационных технологий, что создает благоприятные условия для развития креативности студентов. Информационные и коммуникационные технологии включают в себя компьютерные программы, с помощью которых строятся множества Жюлиа и лепестки Ло-Фату для полиномов второй степени.

Ключевые слова: креативность, творчество, алгоритм, заполняющее множество Жюлиа, цикл, лепесток Ло-Фату, орбита точки, неподвижная точка, структура неподвижных точек, нейтрально-рациональная неподвижная точка, параболическая неподвижная точка, нейтрально-иррациональная неподвижная точка, притягивающая неподвижная точка, отталкивающая неподвижная точка.

Для цитирования: Выполнение многоэтапного математико-информационное задания «Циклы, множества Жюлиа и лепестки Ло-Фату» как средство развития креативности студентов // Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социокинетика. 2025. Т. 31, № 1. С. 123–131. https://doi.org/10.34216/2073-1426-2025-31-1-123-131

Research Article

COMPLETION OF A MULTI-STAGE MATHEMATICAL-INFORMATIONAL TASK “CYCLES, JULIA SETS AND LO-FATU PETALS” AS A MEANS OF DEVELOPING STUDENTS’ CREATIVITY

Valery S. Sekovanov, Doctor of Pedagogical Sciences, Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Professor, Kostroma State University, Kostroma, Russia, sekovanovvs@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-8604-8931

Larisa B. Rybina, PhD, Associate Professor, Kostroma State Agricultural Academy, Kostroma, Russia, larisa.rybina.2014@mail.ru, https://orcid.org/0000-0001-7891-9373

Roman Al. Shchepin, Kostroma State University, Kostroma, Russia, kurlikchelovek@gmail.com , https://orcid.org/0009-0000-1175-7488

Abstract. In this article, cycles, Julia sets and Lo-Fatou petals are considered within the framework of a multi-stage mathematical and information task. The study of these sets is associated with both the use of mathematical methods and the application of information and communication technologies, which creates favorable conditions for the development of students’ creativity. Information and communication technologies include computer programs with the help of which Julia sets and Lo-Fatou petals are constructed for second-degree polynomials.

Keywords: creativity, creation, algorithm, filling Julia set, cycle, Lo-Fatou petal, orbit of a point, fixed point, structure of fixed points, neutral-rational fixed point, parabolic fixed point, neutral-irrational fixed point, attractive fixed point, repulsive fixed point.
For citation: Completion of a multi-stage mathematical-informational task "Cycles, Julia sets and Lo-Fatou petals" as a means of developing students' creativity. Vestnik of Kostroma State University. Series: Pedagogy. Psychology. Sociokinetics, 2025, vol. 31, no. 1, pp. 123–131 (In Russ.). https://doi.org/10.34216/2073-1426-2025-31-1-123-131

Голоморфная динамика в настоящее время интенсивно развивается и находит многочисленные приложения [Секованов 2021а: 5]. Данная дисциплина тесно связана с новыми ветвями современной математики: фрактальной геометрией [Секованов 2016б: 4], теорией хаоса и синергетикой [Секованов 2019: 15]. Важной составляющей голоморфной динамики являются множества Жюлиа [Секованов 2015: 35]. Так, например, на каждом своем множестве Жюлиа квадратичная функция хаотична, а множество Жюлиа, как правило, имеет фрактальную структуру. Отметим, что множества Жюлиа, за мелким исключением, имеют сложнейшую математическую структуру и построить их модели без использования компьютера практически невозможно [Секованов, Салов, Самохов: 86]. Отметим также, что множества Жюлиа связаны с другими множествами, например таким, как цветок Ло-Фату. И, наконец, отметим, что множества Жюлиа являются одними из самых красивых математических объектов [Пайген, Рихтер: 12]. Перечисленные выше свойства множеств Жюлиа открывают широкий спектр возможностей для развития творчества обучаемых.

Настоящая статья посвящена развитию креативности студентов при изучении голоморфной динамики в рамках многоэтапного математико-информационного задания (ММИЗ) «Циклы, множества Жюлиа и лепестки Ло-Фату». Понятию креативность и многоэтапным математико-информационным заданиям посвящены многочисленные работы, среди которых укажем [Выполнение 2016: 118]. В работах [Милнор: 3; Секованов 2021а: 4] излагаются основные положения голоморфной динамики, знакомство с которыми дает возможность обучающемуся развить свой интерес к математике и информатике.

Как уже отмечалось, при выполнении данного ММИЗ студенты имеют возможность познакомиться с множествами Жюлиа и лепестками Ло-Фату.

ММИЗ являются лабораторией формирования креативности студентов. При их выполнении у обучающихся развиваются гибкость мышления, интуиция, вырабатывается умение прогнозировать результаты математической деятельности [Выполнение 2024: 63].

Следует отметить, что множества Жюлиа в настоящее время используются в качестве математических моделей [Секованов 2021б: 163, Секованов 2017: 4]. Например, в физике данные множества применяются при разработке математических моделей фазовых переходов.

Итерациями функций на вещественной и комплексной плоскостях занимались длительное вре-

Рис. 1. Схема-план ММИЗ «Циклы, множества Жюлиа и лепестки Ло-Фату»

мя [Пайген, Рихтер: 3]. Так, например, появились важнейшие понятия «динамика Ферхюльста», «константа Фейгенбаума», «проблема Кэли», «лепесток Ло-Фату», «диск Зигеля», «кольцо Эрмана».

В настоящей статье в рамках вышеуказанного ММИЗ мы рассмотрим множества Жюлиа, притягивающие циклы и лепестки Ло-Фату, на примере семейства комплексных полиномов $f_c(z)=z^2+c$. Схема-план ММИЗ «Циклы, множества Жюлиа и лепестки Ло-Фату» указана на рисунке 1.

Этап 1. Основные определения, терминология. Примеры.

Напомним, что точка z_0 называется неподвижной, если $f(z_0)=z_0$. Если же $f^{(n)}(z^0)=z^0$ ($n>1$), то точку z^0 мы назовем периодической точкой. Такое наименьшее *n*, при котором $f^{(n)}(z^0)=z^0$, называется периодом z^0. Если $|\lambda|>1$ ($|\lambda|=1$, $|\lambda|<1$), то точка *z* называется отталкивающей (соответственно, нейтральной, притягивающей), где $\lambda=\left(f^{(n)}(z)\right)'$.

Например, функция $f(z)=z^2-1$ имеет две неподвижные отталкивающие точки $z_1=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, $z_2=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, а вторая итерация данной функции $f^{(2)}(z)=z^4-2z^2$ имеет неподвижные притягивающие точки $z_3=0$ и $z_4=-1$. Для функции $f(z)$ точки z_3 и z_4 будут иметь период, равный двум.

Функция $f(z)=z^2+\dfrac{1}{4}$ будет иметь неподвижную нейтральную точку $z=\dfrac{1}{2}$, поскольку $|f(z)|=1$.

Под орбитой точки *z* будем понимать последовательность $\left\{z, f(z), f^{(2)}(z), f^{(3)}(z), ..., f^{(n)}(z), ...\right\}$.

Например, для функции $f(z)=z^3$ орбитой точки *z* является последовательность $\left\{z, z^3, ..., z^{3n}, ...\right\}$.

Пусть z_0 – притягивающая неподвижная точка функции *f*. Множество $A(z_0)=\left\{z\in C: f^{(n)}(z)\to z_0, n\to\infty\right\}$ будем называть бассейном (областью) притяжения точки z_0.

Пусть $f(z)=z^3$. Поскольку $f^{(n)}(z)=z^{3n}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f^{(n)}(z)\right)=\infty$ при $|z|>1$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f^{(n)}(z)\right)=0$ при $|z|<1$, то две неподвижные точки $z_1=0$, $z_2=\infty$ имеют два бассейна притяжения: внутренность круга единичного радиуса с центром в начале координат (точка z_1); внешность круга единичного радиуса с центром в начале координат (точка z_2).

Этап 2. Структура неподвижных точек.

Замечание: если функция $f_c(z)$ имеет одну неподвижную притягивающую точку и одну неподвижную отталкивающую точку, то для краткости изложения будем говорить, что имеет место случай (*PO*) или выполняется условие (*PO*); соответственно, если функция $f_c(z)$ имеет одну неподвижную притягивающую точку и одну неподвижную нейтральную точку, то – (*PN*). Аналогично обозначим случаи (*PP*), (*NN*), (*NO*), (*OO*)).

В работах [Секованов, Рыбина, Березкина: 144, Секованов 2021б: 163] мы не ставили задачу разделения типов нейтральных неподвижных точек. При выполнении данного ММИЗ будем рассматривать рационально-нейтральные (параболические) неподвижные точки и иррационально нейтральные неподвижные точки.

Определение 1. Пусть дана голоморфная функция $f(z)$. Будем считать, что данная функция имеет рационально-нейтральную неподвижную (параболическую) точку *z*, если $f'(z)=e^{2\pi i\alpha}$, где α – рациональное число.

Под структурой неподвижных точек семейства функций будем понимать диады, компонентами которых являются притягивающие, нейтральные и отталкивающие точки при конкретных значениях параметра *c*.

Структура неподвижных точек и орбиты нескольких точек функции $f_c(z)=z^2+c$ отражены в таблице 1. Отметим, что в данной таблице указано наличие нейтрально-рациональных (параболических) точек. Видим, что некоторые орбиты стремятся к неподвижным точкам (притягивающим и нейтральным) по-разному.

Этап 3. Множества Жюлиа семейства функций $f_c(z)=z^2+c$ при различных значениях параметра *c*.

1. Рассмотрим случай (*PO*) (табл. 1).

Если $c=-0,39-0,58i$, то точка $z_1\approx-0,3671-0,3344i$ является притягивающей неподвижной точкой, а точка $z_2\approx1,3671+0,3344i$ – отталкивающей неподвижной точкой.

Если $c=-0,12375+0,565i$, то $z_1\approx-0,225+0,3897i$, $z_2\approx1,22-0,3897i$ – неподвижные точки, первая из которых притягивающая, а вторая – отталкивающая.

В рассмотренных двух случаях в зависимости от стартовой точки *z* имеются три возможности:

1) если точка *z* находится внутри закрашенного множества (заполняющего множества Жюлиа), то ее орбита будет стремиться к неподвижной притягивающей точке $z_1\approx-0,3671-0,3344i$ в первом случае, когда $c=-0,39-0,58i$ (рис. 2) или к $z_1\approx-0,225+0,3897i$ во втором случае, когда $c=-0,12375+0,565i$ (рис. 3). В обоих случаях имеется притягивающий цикл периода 1.

2) если точка *z* находится вне закрашенного множества (заполняющего множества Жюлиа), то ее орбита будет стремиться к бесконечности (здесь также наблюдается притягивающий цикл периода 1, поскольку бесконечно удаленная точка является неподвижной и сверхпритягивающей);

3) если точка z находится на границе закрашенного множества (множества Жюлиа), то ее орбита будет хаотично перемещаться по данному множеству.

2. Рассмотрим случай (*NN*) (табл. 1).

Здесь значение параметра $c = 0,25$, а точки $z_1 = z_2 = 0,5$ будут совпадающими нейтральными неподвижными точками. В данном случае если точка z находится внутри закрашенного множества (заполняющего множества Жюлиа), то ее орбита будет стремиться к неподвижной нейтральной точке, если же точка будет находиться вне закрашенного множества, то ее орбита будет стремиться к бесконечности (рис. 1). Здесь отличие от предыдущего случая заключается в том, что стартовая точка может находиться очень близко к нейтральной неподвижной точке, но орбита ее будет стремиться к бесконечности, что указывает на наличие Лепестка Ло-Фату.

3. Рассмотрим случай (*NO*) (табл. 1).

Если значение параметра $c = -0,75$, то точка $z_1 = -0,5$ является нейтральной неподвижной точкой, а точка $z_2 = 1,5$ – отталкивающей неподвижной точкой. В данном случае (*NO*) орбита точки будет вести себя так же, как и в предыдущем случае (*NN*): появляется лепесток Ло-Фату (рис. 4).

Если $c = -0,481762 - 0,53165i$, то точка $z_1 \approx -0,4045 - 0,2939i$ будет нейтральной неподвижной точкой, а точка $z_2 \approx 1,2737 - 0,4782i$ – отталкивающей неподвижной точкой. Здесь появляется притягивающий цикл периода 5. Все пять точек данного цикла отщепляются от точки $z_1 \approx -0,4045 - 0,2939i$, изображенной крупной точкой (рис. 5). Налицо притягивающий цикл.

4. Рассмотрим случай (*OO*) (табл. 1).

Если $c = -0,12 + 0,74i$, то точки $z_1 \approx -0,2737 + 0,4782i$ и $z_2 \approx 1,2737 - 0,4782i$ являются отталкивающими неподвижными точками. В данном случае множество Жюлиа состоит из бесконечного числа деформированных окружностей, образующих связное множество. Внутренние точки данного множества притягиваются не одной неподвижной точкой, а циклом из трех точек, отмеченных на рисунке более крупно (рис. 7).

Если $c = -1$, то получим две неподвижные отталкивающие точки $z_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $z_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Внутренние точки данного множества притягиваются не одной неподвижной точкой, а циклом из двух точек $(-1; 0)$, отмеченных на рисунке более крупно (рис. 6). Данные точки будут притягивающими неподвижными точками второй итерации $f_c^{(2)}(z)$ функции $f_c(z)$.

Отметим, что ни при каком значении параметра c случаи (*PP*) и (*PN*) (табл. 1) невозможны.

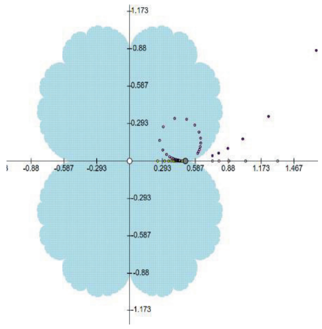
Также следует заметить, что орбиты нескольких неподвижных точек указывают характер их приближения к неподвижным точкам.

При выполнении данного ММИЗ студентам предлагается подробно выполнить все вычисления и провести исследование характера неподвижных точек, указанных в таблице 1.

Кратко опишем алгоритм построения заполняющегося множества Жюлиа. Комплексная величина $c = p + iq$ фиксируется (на комплексной плоскости ее имитирует монитор компьютера) и отмечается точка (x, y) (считаем, что $z = x + iy$). Если орбита $(x, y) \to (x_1, y_1) \to \ldots \to (x_n, y_n) \to \ldots$ точки $z = x + iy$ ограничена, то она закрашивается в серый цвет. В противном случае данная точка пропускает-

Таблица 1

Семейство функций $f_c(z) = z^2 + c$

№ пункта	z_1	z_2	Множество Жюлиа и неподвижные точки функции $f_c(z) = z^2 + c$
1	P	P	–
2	P	N	–
3	N	N	$c = 0,25$ $z_1 = z_2 = 0,5$ – нейтральные неподвижные точки  Рис. 1. Множество Жюлиа функции при $c = 0,25$

Продолжение таблицы 1

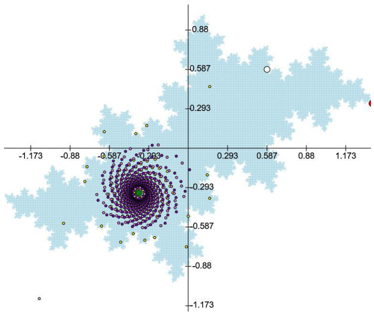
<table>
<tr><th>№ пункта</th><th>z_1</th><th>z_2</th><th>Множество Жюлиа и неподвижные точки функции $f_c(z)=z^2+c$</th></tr>
<tr><td>4</td><td>P</td><td>O</td><td>$c=-0,39-0,58i$
$z_1\approx-0,3671-0,3344i$ – притягивающая неподвижная точка
$z_2\approx1,3671+0,3344i$ – отталкивающая неподвижная точка


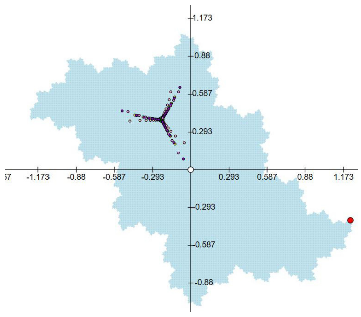
Рис. 2. Множество Жюлиа функции при $c=-0,39-0,58i$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>$c=-0,12375+0,565i$
$z_1\approx-0,225+0,3897i$ – притягивающая неподвижная точка
$z_2\approx1,22-0,3897i$ – отталкивающая неподвижная точка


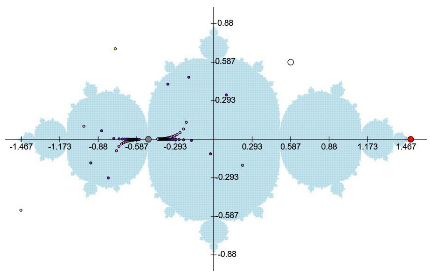
Рис. 3. Множество Жюлиа функции при $c=-0,12375+0,565i$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">5</td><td rowspan="2">N</td><td rowspan="2">O</td><td>$c=-0,75$
$z_1=-0,5$ – нейтральная неподвижная точка
$z_2=1,5$ – отталкивающая неподвижная точкой


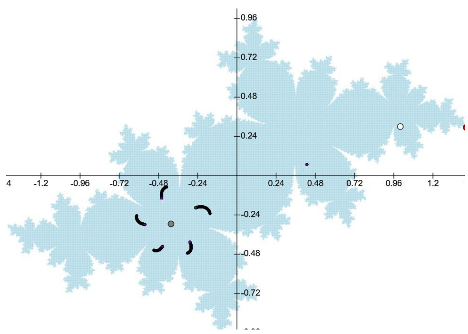
Рис. 4. Множество Жюлиа функции при $c=-0,75$</td></tr>
<tr><td>$c=-0,481762-0,53165i$
$z_1\approx-0,4045-0,2939i$ – нейтральная неподвижная точка
$z_2\approx1,2737-0,4782i$ – отталкивающая неподвижная точка


Рис. 5. Множество Жюлиа функции при <<15_Eqn00101.wmf>></td></tr>
</table>

Окончание таблицы 1

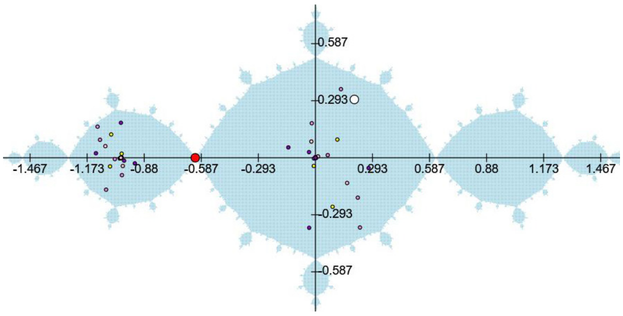
<table>
<tr><th>№ пункта</th><th>z_1</th><th>z_2</th><th>Множество Жюлиа и неподвижные точки функции $f_c(z)=z^2+c$</th></tr>
<tr><td rowspan="2">6</td><td rowspan="2">O</td><td rowspan="2">O</td><td>$c=-1$
$z_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ – отталкивающая неподвижная точка
$z_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ – отталкивающая неподвижная точка


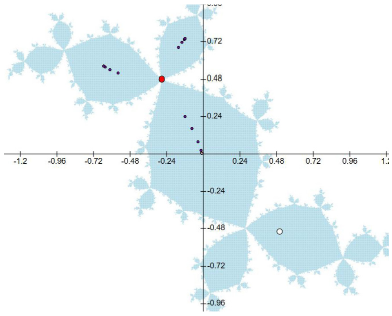
Рис. 6. Множество Жюлиа функции при $c=-1$</td></tr>
<tr><td>$c=-0{,}12+0{,}74i$
$z_1\approx-0{,}2737+0{,}4782i$ – отталкивающая неподвижная точка
$z_2\approx1{,}2737-0{,}4782i$ – отталкивающая неподвижная точка


Рис. 7. Множество Жюлиа функции при $c=-0{,}12+0{,}74i$</td></tr>
</table>

ся и исследуется следующая точка с координатами $(x,\ y+h)$, где h – шаг, с которым изменяется переменная величина y. Когда переменная y достигнет границы видимой части монитора, переменная x получит приращение h, и будет исследоваться орбита точки $(x+h,\ y)$ и т. д. Данный процесс закончится тогда, когда будет исследована орбита каждой точки видимой части экрана. В результате искомое множество закрасится в серый цвет и будет заполняющим множеством Жюлиа.

Фрагмент программы построения множества Жюлиа представлен ниже:

```
procedure drawJulia;
var
z: Complex;
begin
for var x := 0 to picbox_width_div_2 do
for var y := 0 to Window.Height.Trunc do
begin
z := ((x - picbox_width_div_2) / M, (picbox_height_div_2 - y) / M);
for var i := 1 to 100 do
z := f(z);
if (abs(z.Real) <5) and (abs(z.Imaginary) <5) then
begin
SetPixel(x, y, Colors.LightBlue);
SetPixel(2 * picbox_width_div_2 - x, 2 * picbox_height_div_2 - y, Colors.LightBlue);
end;
end;
end;
```

Отметим, что от структуры заполняющегося множества Жюлиа зависит наличие нейтральных неподвижных точек.

Этап 4. Лепесток Ло-Фату семейства функций $f_c(z)=z^2+c$.

Приведем пример программы, с помощью которой строятся орбиты точек, лепестки Ло-Фату и заполняющие множества Жюлиа:

```
function f(z: Complex): Complex;
begin result := z * z + C; end;
procedure drawXY(d: integer; c: integer);
vardx, x1, y1, x2, y2: integer;dl, l: real;s: string;
begin
Line(0, picbox_height_div_2, Window.Width, picbox_height_div_2);
```

```
Line(picbox_width_div_2, 0, picbox_width_div_2, Window.Height);
dx := picbox_width_div_2 div d;
dl := dx / M;l := dl;x1 := picbox_width_div_2;x2 := x1;y1 := picbox_height_div_2 - 5;
y2 := picbox_height_div_2 + 5;  s := '';
while x1 < Window.Width do
begin
s := Round(l, c).ToString();x1 := x1 + dx; Line(x1, y1, x1, y2);
DrawText(x1 - 5, y2 + 5, 10, 5, s); Line(y1, x1, y2, x1);
DrawText(y2 + 13, x1 - 4, 10, 5, '-' + s);x2 := x2 - dx;
Line(x2, y1, x2, y2);DrawText(x2 - 5, y2 + 5, 10, 5, '-' + s);
Line(y1, x2, y2, x2);DrawText(y1 + 20, x2 - 4, 10, 5, s);l := l + dl;
end;
DrawText(Window.Width - 15, picbox_height_div_2 - 20, 10, 5, 'X');
DrawText(picbox_width_div_2 - 20, 5, 10, 5, 'Y');
end;
procedure drawJulia;
var
z: Complex;
begin
for var x := 0 to picbox_width_div_2 do
for var y := 0 to Window.Height.Trunc do
begin
z := ((x - picbox_width_div_2) / M, (picbox_height_div_2 - y) / M);
for var i := 1 to 100 do
z := f(z);
if (abs(z.Real) <5) and (abs(z.Imaginary) <5) then begin
SetPixel(x, y, Colors.LightBlue);
SetPixel(2 * picbox_width_div_2 - x, 2 * picbox_height_div_2 - y, Colors.LightBlue);
end;  end;end;
 procedure drawSpecPoint;
varz: Complex;x, y: integer;abs_z: real;
begin
z := (1 + sqrt(1 - 4 * C)) / 2;abs_z := round(abs(2 * z), 5);
Brush.Color := abs_z <1 ? Colors.Green : abs_z = 1 ? Colors.Gray : Colors.Red;
Circle(round(z.Real * M) + picbox_width_div_2, picbox_height_div_2 - round(z.Imaginary * M), 5);
z := (1 - z.Real, -z.Imaginary);  abs_z := round(abs(2 * z), 5);
Brush.Color := abs_z <1 ? Colors.Green : abs_z = 1 ? Colors.Gray : Colors.Red;
Circle(round(z.Real * M) + picbox_width_div_2, picbox_height_div_2 - round(z.Imaginary * M), 5);
end;
procedure drawIteration;
var
z, z1, z2, z3: Complex;
begin
z := (0,0);z1 := (-0.1, -0.2);z2 := (-0.2, -0.1);z3 := (0.25, 0.15);
Brush.Color := Colors.White;
Circle(z.Real * M + picbox_width_div_2, picbox_height_div_2 - z.Imaginary * M, 5);
for var i := 1 to 300 do
begin
Brush.Color := Colors.Yellow;
z := f(z);
Circle(z.Real * M + picbox_width_div_2, picbox_height_div_2 - z.Imaginary * M, 2);
Sleep(400);
Brush.Color := Brushes.Pink.Color;  z1 := f(z1);
Circle(z1.Real * M + picbox_width_div_2, picbox_height_div_2 - z1.Imaginary * M, 2);
Sleep(400);
Brush.Color := Brushes.Violet.Color;    z2 := f(z2);
Circle(z2.Real * M + picbox_width_div_2, picbox_height_div_2 - z2.Imaginary * M, 2);
Sleep(400);
Brush.Color := Brushes.DarkViolet.Color;     z3 := f(z3);
Circle(z3.Real * M + picbox_width_div_2, picbox_height_div_2 - z3.Imaginary * M, 2);
Sleep(400);
end;end;
begin
Window.Height := 800; Window.Width := Window.Height;Window.CenterOnScreen;
Window.Caption := 'МножествоЖюлиа';picbox_height_div_2 := Window.Height.Trunc div 2;picbox_width_div_2 := Window.Width.Trunc div 2;
var ms := Milliseconds();C := (-0.12375, 0.56508);M := 225;
drawJulia;drawXY(6, 3);drawSpecPoint;
Window.Caption := Window.Caption + ' (' + (Milliseconds() - ms) div 1000 + 's)';
 drawIteration; end.
```

Данная программа универсальна в том смысле, что, меняя значения параметра *c*, мы получим различные множества Жюлиа. При одних значениях *c* появятся лепестки Ло-Фату, при других значениях *c* лепестки Ло-Фату будут отсутствовать.

В заключение отметим, что выполнение ММИЗ «Циклы, множества Жюлиа и лепестки Ло-Фату» позволяет студентам использовать как математические методы, так и информационные и коммуникационные технологии. Причем информационные технологии играют не вспомогательную роль, а являются важным инструментом, позволяющим выявить множества Жюлиа, лепестки Ло-Фату и циклы, что развивает у студентов гибкость мышления, интуицию и толерантность к новизне – важнейшие креативные качества. При выполнении студентами контрольных заданий, связанных с созданием математических моделей с помощью информационных технологий, наиболее высокие результаты получили студенты, выполнившие ММИЗ, представленное в данной статье. Кроме того, после выполнения ММИЗ «Циклы, множества Жюлиа и лепестки Ло-Фату» интерес студентов к математике и информатике возрос, что указывает на большое значение рассмотренного задания для развития мотивации обучающихся к изучению данных дисциплин.

Список литературы

Выполнение многоэтапного математико-информационного задания «Построение фрактальных множеств с помощью L-систем и информационных технологий» как средство развития креативности студентов / В.С. Секованов, В.А. Ивков, А.А. Пигузов и др. // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2016. Т. 12, № 3. С. 118–125.

Выполнение многоэтапного математико-информационного задания «Обрамление множества Мандельброта семейств полиномов третьей степени и замечательные кривые» / Е.С. Смирнова, В.С. Секованов , Л.Б. Рыбина и др. // Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социокинетика. 2024. Т. 30, № 1. С. 63–72.

Минлор Дж. Голоморфная динамика. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. 320 с.

Пайген Х.-О, Рихтер П.Х. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. Москва: Мир, 1993. 176 с.

Секованов В.С. Элементы теории фрактальных множеств. Москва: Книжный дом «Либроком», 2015. 248 с.

Секованов В.С. О некоторых дискретных нелинейных динамических системах // Фундаментальная и прикладная математика. Москва: Интуит, 2016а. Т. 21, № 3. С. 185–199.

Секованов В.С. Что такое фрактальная геометрия? Москва: Ленан, 2016б. 272 с.

Секованов В.С. Элементы теории дискретных динамических систем. Санкт-Петербург: Лань, 2017. 180 с.

Секованов В.С. Фрактальная геометрия: Преподавание, задачи, алгоритмы, синергетика, эстетика, приложения. Санкт-Петербург: Лань, 2019. 180 с.

Секованов В.С. Голоморфная динамика. Санкт-Петербург: Лань, 2021а. 168 с.

Секованов В.С. О множествах Жюлиа функций, имеющих неподвижные параболические точки // Фундаментальная и прикладная математика. Москва: Интуит, 2021б. Т. 23, № 4. С. 163–176.

Секованов В.С., Салов А.Л., Самохов Е.А. Использование кластера при исследовании фрактальных множеств на комплексной плоскости // Актуальные проблемы преподавания информационных и естественно-научных дисциплин: материалы V Всерос. науч.-метод. конф. Кострома: КГУ им. Н.А. Некрасова, 2011. С. 85–103.

Секованов В.С., Рыбина Л.Б., Березкина А.Е. О множествах Жюлиа функций, имеющих параболическую неподвижную точку // Актуальные проблемы преподавания информационных и естественно-научных дисциплин: материалы XII Всерос. науч.-метод. конф. Кострома: КГУ, 2018. С. 144–150.

References

Minlor Dzh. *Golomorfnaja dinamika* [Holomorphic Dynamics]. Izhevsk, NIC «Reguljarnaja i haoticheskaja dinamika» Publ., 2000, 320 p. (In Russ.)

Pajgen H.-O, Rihter P.H. *Krasota fraktalov. Obrazy kompleksnyh dinamicheskih system* [The Beauty of Fractals. Images of Complex Dynamic Systems]. Moscow, Mir Publ., 1993, 176 p. (In Russ.)

Sekovanov V.S. *Jelementy teorii fraktal'nyh mnozhestv* [Elements of the theory of fractal sets]. Moscow, Librokom Publ., 2015, 248 p. (In Russ.)

Sekovanov V.S. *O nekotoryh diskretnyh nelinejnyh dinamicheskih sistemah* [On Some Discrete Nonlinear Dynamic Systems]. *Fundamental'naja i prikladnaja matematika* [Fundamental and Applied Mathematics]. Moscow, INTUIT Publ., 2016a, vol. 21, no. 3, pp. 185-199. (In Russ.)

Sekovanov V.S. *Chto takoe fraktal'naja geometrija?* [What is Fractal Geometry?]. Moscow, Lenan Publ., 2016b, 272 p. (In Russ.)

Sekovanov V.S. *Jelementy teorii diskretnyh dinamicheskih system* [Elements of the Theory of Discrete Dynamic Systems]. Saint Petersburg, Lan' Publ., 2017, 180 p. (In Russ.)

Sekovanov V.S. *Fraktal'naja geometrija: Prepodavanie, zadachi, algoritmy, sinergetika, jestetika, prilozhenija* [Fractal Geometry: Teaching, Problems, Algorithms, Synergetics, Esthetics, Applications]. Saint Petersburg, Lan' Publ., 2019, 180 p. (In Russ.)

Sekovanov V.S. *Golomorfnaja dinamika* [Holomorphic dynamics]. Saint Petersburg, Lan' Publ., 2021a, 168 p. (In Russ.)

Sekovanov V.S. *O mnozhestvah Zhjulia funkcij, imejushhih nepodvizhnye parabolicheskie tochki* [On Julia sets of functions with parabolic fixed points]. *Fundamental'naja i prikladnaja matematika* [Fundamental and Applied Mathematics]. Moscow, Intuit Publ., 2021b, vol. 23, no. 4, pp. 163-176. (In Russ.)

Sekovanov V.S., Salov A.L., Samohov E.A. *Ispol'zovanie klastera pri issledovanii fraktal'nyh mnozhestv na kompleksnoj ploskosti* [Using a cluster in the study of fractal sets on the complex plane]. *Aktual'nye problemy prepodavanija informacionnyh i estestvenno-nauchnyh disciplin: materialy V Vserossijskoj nauchno-metodicheskoj konferencii* [Actual problems of teaching information and natural science disciplines: materials of the V All-Russian scientific and methodological conference]. Kostroma, KGU im. N.A. Nekrasova Publ., 2011, pp. 85-103. (In Russ.)

Sekovanov V.S., Rybina L.B., Berezkina A.E. *O mnozhestvah Zhjulia funkcij, imejushhih parabolicheskuju nepodvizhnuju tochku* [On Julia sets of functions with a parabolic fixed point]. *Aktual'nye problemy prepodavanija informacionnyh i estestvenno-nauchnyh disciplin: materialy XII Vseros. nauch.-metod. konf.* [Actual problems of teaching information and natural science disciplines: materials of the XII All-Russian scientific and methodological conference]. Kostroma, KGU Publ., 2018, pp. 144-150. (In Russ.)

Vypolnenie mnogojetapnogo matematiko-informacionnogo zadanija «Postroenie fraktal'nyh mnozhestv s pomoshh'ju L-sistem i informacionnyh tehnologij» kak sredstvo razvitija kreativnosti studentov [Completion of a multi-stage mathematical-informational task “Construction of fractal sets using L-systems and information technologies” as a means of developing students' creativity], Sekovanov V.S., Ivkov V.A., Piguzov A.A. et al. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie* [Modern information technologies and IT education], 2016, vol. 12, no. 3. pp. 118-125. (In Russ.)

Vypolnenie mnogojetapnogo matematiko-informacionnogo zadanija «Obramlenie mnozhestva Mandel'brota semejstv polinomov tret'ej stepeni i zamechatel'nye krivye» [Completion of the multi-stage mathematical-information task “Framing the Mandelbrot set of families of third-degree polynomials and remarkable curves”], Smirnova E.S., Sekovanov V.S., Rybina L.B. et al. *Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija: Pedagogika. Psihologija. Sociokinetika* [Bulletin of Kostroma State University. Series: Pedagogy. Psychology. Sociokinetics], 2024, vol. 30, no. 1. pp. 63-72. (In Russ.)

Статья поступила в редакцию 11.01.2025; одобрена после рецензирования 01.03.2025; принята к публикации 01.03.2025.

The article was submitted 11.01.2025; approved after reviewing 01.03.2025; accepted for publication 01.03.2025.